

九州産業大学工学部 正員 吉村 健
同 学生員 梅崎秀明
九州大学工学部 正員 吉村虎蔵

1 まえがき 変断面梁の固有値解析では、集中質量法が広く用いられているが、一方、近似解法もしくは解析的手法もいくつか提案されている(たとえば、文献(1),(2))。本報告では、断面2次モーメントが連続関数で与えられる変断面単純梁に対する曲げ振動の、固有値の一近似解法について述べ、二・三の数値計算例を記す。

2 解析法

図-1に示す変断面単純梁に対する曲げ振動の微分方程式は、単位スパン長あたりの質量 ρ を一定と仮定すると、

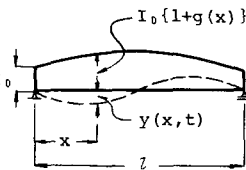


図-1

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ I(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

で表わされる。ここに、 $y(x,t)$ と $I(x) = I_0 \{1+g(x)\}$ は、それぞれ、点 x における梁のたわみと断面2次モーメントであり、 E はヤング係数、 t は時間である。この梁の n 次の固有円振動数 ω_n と固有振動モード $\varphi_n(x)$ を、それぞれ、

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_0}{\rho}} \sqrt{\lambda_n} = \Omega_n \sqrt{\lambda_n} \quad \text{----- (2)}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{in} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad \text{----- (3)}$$

で表わす。ここに、 Ω_n は等断面 $I(x) = I_0$ の単純梁に対する固有円振動数である。

さて、後述のように、 $I_{\max}/I_{\min} < 10$ 程度の変断面単純梁に対する式(3)のフーリエ展開では、その第 n 項 A_{nn} 近傍の M 個の項 ($M=5$ 程度) の和で $\varphi_n(x)$ をよく近似することができる。そこで、式(3)を次のような近似式、

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=n-R}^{n+L} A_{in} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad \text{----- (4)}$$

で表わし(項数は M)、固有値の近似解を求めることを考えてみたい(R と L は自然数)。式(4)を式(1)に代入して次式が得られる。

$$\sum_{i=n-R}^{n+L} \left[-\lambda_n + \left(\frac{i}{n} \right)^4 \left\{ 1 + g(x) \right\} - \left(\frac{i}{\pi n^2} \right)^2 g''(x) \right] A_{in} \sin i\pi x - \frac{2}{\pi n^3} g'(x) \sum_{i=n-R}^{n+L} i^3 A_{in} \cos i\pi x = 0 \quad \text{----- (5)}$$

ここに、 $X = \frac{x}{l}$ 。式(5)に $\sin J\pi X$ ($J=n-R, \dots, n, \dots, n+L$) をかけた M 個の式を、それぞれ、 $X=0$ から $X=1$ まで積分すると次式が得られる。

$$-\lambda_n A_{Jn} + \sum_{i=n-R}^{n+L} f_{ji}^{(n)} A_{in} = 0 \quad \text{----- (6)}$$

($J=n-R, \dots, n, \dots, n+L$)

ここに、 $f_{ji}^{(n)}$ は、 $J \neq i$ のときと $J=i$ のとき、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_{ji}^{(n)} &= 2 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{i}{n} \right)^4 g(x) - \left(\frac{i}{\pi n^2} \right)^2 g''(x) \right\} \sin i\pi x \\ &\quad - \frac{2i^3}{\pi n^3} g'(x) \cos i\pi x \} \sin J\pi x dx \\ f_{JJ}^{(n)} &= \left(\frac{J}{n} \right)^4 + 2 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{J}{n} \right)^4 g(x) - \left(\frac{J}{\pi n^2} \right)^2 g''(x) \right\} \sin J\pi x \\ &\quad - \frac{2J^3}{\pi n^3} g'(x) \cos J\pi x \} \sin J\pi x dx \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (7)}$$

式(6)を次のように行列表示する。

$$(\mathbb{F}_n - \lambda_n \mathbb{I}) \mathbf{a}_n = 0 \quad \text{----- (8)}$$

ここに、 $\mathbb{I}$ は単位行列であり、 $\mathbf{a}_n$ は $\mathbf{a}_n^T = (A_{n-R,n}, \dots, A_{n,n}, \dots, A_{n+L,n})$ ($\mathbf{a}_n^T$ は $\mathbf{a}_n$ の転置ベクトル) なる M 次元ベクトルである。 $\mathbf{a}_n$ を n 次の固有振動モードのフーリエ係数ベクトルと呼ぶことにする。また、 $\mathbb{F}_n$ は、

$$\mathbb{F}_n = \begin{bmatrix} f_{n-R,n-R}^{(n)} & \dots & f_{n-R,n}^{(n)} & \dots & f_{n-R,n+L}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n,n-R}^{(n)} & \dots & f_{n,n}^{(n)} & \dots & f_{n,n+L}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n+L,n-R}^{(n)} & \dots & f_{n+L,n}^{(n)} & \dots & f_{n+L,n+L}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{----- (9)}$$

で表わされる $M \times M$ の行列である。式(8)が $\mathbf{a}_n \neq 0$ のとき成立するためには、次式が満足されなければならない。

$$\det. |\mathbb{F}_n - \lambda_n \mathbb{I}| = 0 \quad \text{----- (10)}$$

式(10)より M 個の λ_n が得られ、これら λ_n を式(8)に代入

してM個のベクトル A_m が得られる。これら λ_m と A_m のうち、 $|A_{nn}| > |A_{im}|$ を満たす1個の λ_m とこれに対する A_m が、それぞれ、求めるn次の固有値と固有振動モードのフーリエ係数ベクトルである。

特に、断面変化が小さい場合には $(l/g) \ll 1$ ，上記解析法をさらに簡略化することができる。すなわち、この場合、 $|A_{nn}| \gg |A_{im}|$ であることから、式(6)で $j=m$ とした式において、 A_{nn} 以外のすべての項を無視すると次式を得る。

$$(-\lambda_m + f_{n,n}^{(m)}) A_{nn} = 0 \quad \text{----- (11)}$$

式(11)より得られる λ_m を用いると、n次の固有振動モードに対するフーリエ係数が次式で与えられる。

$$\frac{A_{in}}{A_{nn}} = -f_{ni}^{(m)} / \left\{ \left(\frac{i}{n} \right)^4 - \lambda_m \right\} \quad (i \neq n) \quad \text{---- (12)}$$

この解析法はきわめて簡単であって、文献(3)に記される、質量分布が一様でない弦に対する固有値の近似解法を、変断面単純梁に適用したものとみなすことができる。

3 数値計算例 表-1と表-2は、 $g(x) = \alpha x(1-x)$ ； $\alpha = -3.6, 1, 2, 20, 36$ ($0.1 \leq I(0.5)/I(0) \leq 10$)，に対する数値計算結果である。ただし、式(4)のフーリエ展開において、1次と2次の固有振動モードに

a	$\frac{I(0.5)}{I(0)}$	1st	2nd	3rd	4th
-3.6	0.1	1.0014	1.0031	1.0030	1.0040
1	1.25	1.0006*	1.0010*	1.0012*	1.0013*
2	1.5	1.0018*	1.0028*	1.0035*	1.0039*
20	6	1.0019	1.0044	1.0063	1.0080
36	10	1.0030	1.0072	1.0106	1.0138

表-1. 本法と集中質量法による固有値 λ_m の比

a		1st		2nd		3rd			4th		
		A_{31}/A_{11}	A_{51}/A_{11}	A_{42}/A_{22}	A_{62}/A_{22}	A_{13}/A_{33}	A_{53}/A_{33}	A_{73}/A_{33}	A_{24}/A_{44}	A_{64}/A_{44}	A_{84}/A_{44}
-3.6	proposed	-0.0461	0.0046	-0.1253	0.0152	0.0478	-0.2019	0.0290	0.1324	-0.2758	0.0461
	lumped mass	-0.0465	0.0055	-0.1271	0.0185	0.0477	-0.2053	0.0356	0.1326	-0.2815	0.0574
1	proposed	0.0043*	0.0003*	0.0122*	0.0011*	-0.0036*	0.0202*	0.0020*	-0.0102*	0.0281*	0.0030*
	lumped mass	0.0037	0.0003	0.0104	0.0011	-0.0037	0.0171	0.0022	-0.0104	0.0234	0.0032
2	proposed	0.0086*	0.0006*	0.0246*	0.0021*	-0.0063*	0.0414*	0.0041*	-0.0176*	0.0588*	0.0061*
	lumped mass	0.0065	0.0006	0.0184	0.0023	-0.0065	0.0303	0.0044	-0.0185	0.0416	0.0066
20	proposed	0.0210	0.0029	0.0604	0.0110	-0.0218	0.0998	0.0212	-0.0638	0.1373	0.0324
	lumped mass	0.0220	0.0036	0.0640	0.0139	-0.0224	0.1067	0.0273	-0.0663	0.1481	0.0424
36	proposed	0.0238	0.0035	0.0684	0.0131	-0.0249	0.1132	0.0253	-0.0734	0.1537	0.0388
	lumped mass	0.0254	0.0046	0.0743	0.0178	-0.0260	0.1247	0.0353	-0.0779	0.1738	0.0553

表-2. 本法と集中質量法による固有振動モードのフーリエ係数

ついては3項近似し、3次以上の高次の固有振動モードについては4項近似した。比較のため、集中質量法(20質点系)による解析も合わせて行なったが、表-1の固有値ではこれら両者の比を記し、表-2の固有振動モードのフーリエ係数ではその結果も併記した。また、表中*で示される $\alpha=1$ と $\alpha=2$ に対する結果は、式(10)と式(12)を用いて得られたものである。ただし、この場合の λ_m は、

$$\lambda_n = 1 + \frac{\alpha}{6} \left(1 + \frac{3}{n^2 \pi^2} \right) \quad \text{----- (13)}$$

で与えられ、また、 A_{im}/A_{nn} は、

$$A_{im}/A_{nn} = 8\alpha i^3 / [n\pi^2(m+i)^2(n-i)^2 \{ (\frac{i}{n})^4 - \lambda_m \}] \quad \text{---- (14)}$$

で与えられる。表に示す結果から、本法によって、きわめて良い近似解が得られることがわかる。

4 おわりに 断面2次モーメントが連続関数で与えられる変断面単純梁について、固有値の1近似解法を提案し、数値計算による検討を行なった。その結果、本法によってきわめて良い近似解が得られることがわかった。なお、本解析法を用いて結合法⁽⁴⁾による変断面連続梁の固有値解析を行なうことができる。これについては現在研究中である。

謝辞 本研究を行なうにあたり、九州産業大学工学部土木工学科の中島城二君と田中宏治君の援助をいただいたことを記し、謝意を表したい。

参考文献

- (1) Taleb, N.J. & E.W. Suppiger : J. Aerospace Sciences, Vol. 28, No. 5, 1961.
- (2) 崎山 毅 : 長崎大学工学部研究報告, 第4号, S48.
- (3) 坪井 忠二 : 振動論, 現代工学社(復刻版), S51.
- (4) 平井一男 : 土木学会論文報告集, 第104号, S39.