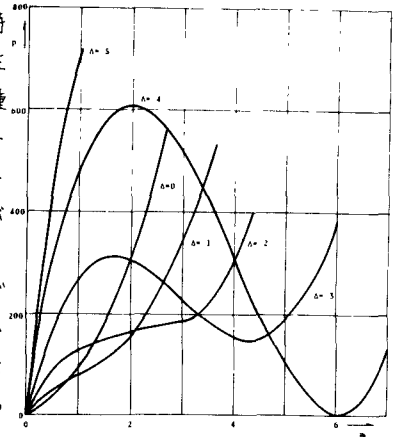


長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 野口 豊

1 緒言 偏平アーチは構造要素として使用され、また、自重、支持部の出来具合、製作過程などによって生ずる初期変形による不完全性をもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり偏平アーチの一種とみなすことができる。図-1に示すように両端ヒンジのsin状の偏平アーチに等分布横荷重が作用するとアーチのライズの大きさ Δ が回転半径の2倍程度までは変形は荷重とともに増大するのみであるが、 Δ が2以上になると釣合荷重に極値が存在し飛び移り座屈が可能となる¹⁾。これに対して動的横荷重が作用すると Δ が2までは対称な非線形曲げ振動、 Δ が2以上になると対称な曲げ振動をもつ動的飛び移り座屈および非対称な曲げ振動をもつ分岐現象をも含んだ動的飛び移り座屈が生ずることが予想される。本論文はかかる偏平アーチの非線形振動の応答を明らかにするものである。



Load-deflection curves of a shallow arch with hinged-hinged ends

図-1

2 解法 初期軸力 P_0 を受け、かつ初期形状 y_0 をもつ偏平アーチに周期的変動荷重が作用する場合の非線形曲げ振動の運動方程式は次のように与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left\{ P_0 - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right\} dx \right\} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\rho g \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、 E : ヤング率, I : 断面2次モーメント, A : 断面積, l : スパン長, ρ : 密度, P_0 : 初期軸力, y_0 : 初期形状, y : たわみ, x : スパン方向の座標, t : 時間, g : 荷重強度, Ω : 荷重の円振動数
初期形状も境界条件を満足しなければならないから、次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{Y}(x) \quad (2) \quad \text{ここに } \Delta = \Delta_0/r, \Delta_0: \text{初期形状のライズ}, r: \text{回転半径}, \bar{Y}(x): \text{形状関数}$$

式(1)の定常解を解くために $y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$ (ここに、 X_n : 座標関数, T_n : 未知の時間関数) のような変数分離形にしてガラーキン法を適用すれば次のような時間に関する連立非線形常微分方程式がえられる。

$$\ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \bar{P}_0 \sum_{k=1}^{\infty} K_{nk}^* T_k + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} S_{nk}^* Q_k^* T_k + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \left(Q_k^* R_{nk} + \frac{1}{2} S_n^* P_{nk} \right) T_k T_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nk}^* T_k T_m = -\gamma_n \rho \cos \bar{\omega} t \quad (3)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n/r)/\lambda_1$, $K_{nk}^* = \frac{E}{\lambda_1^2} \int_0^l \left(\frac{d^2 X_n}{dx^2} \frac{d^2 X_k}{dx^2} \right) dx$, $S_n^* = \int_0^l X_n^2 dx$, $Q_k^* = \int_0^l X_k \frac{d^2 X_k}{dx^2} dx$, $S_n^* = -\frac{1}{\lambda_1^2} \int_0^l \left(\frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) X_n dx$, $R_{nk}^* = -\frac{1}{\lambda_1^2} \int_0^l \left(\frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \frac{d^2 X_k}{dx^2} dx$, $P_{nk}^* = \int_0^l \left(\frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \frac{d^2 X_k}{dx^2} dx$, $\beta_{nk}^* = -\frac{1}{2\lambda_1^2} \int_0^l \left(\frac{d^2 X_n}{dx^2} \right) \frac{d^2 X_k}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx$, $\gamma_n = \int_0^l X_n dx$, $\lambda_1 = \pi/l$, $\bar{P}_0 = P_0/r$, $\rho = \rho l^3/EI$, $\bar{\omega} = \Omega/\omega_1$, $\lambda_1 = l/\rho A \omega_1^2/EI$, ω_1 : 線形1次固有円振動数, E : Eulerの座屈係数(両端ヒンジのとき π 、固定のとき 2π)

式(3)の定常解を求めるにあたっては調和バランス法を適用する。式(3)の非線形復元力に2次および3次の項が含まれているために、解を次のようにFourier級数に仮定する。

$$T_n = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{nj}^* \cos j \bar{\omega} t \quad (4) \quad \text{ここに、} Q_{nj}^*: \text{未定々数}$$

式(4)を式(3)に代入すれば次のような連立非線形代数方程式がえられる。

$$(\alpha_n^2 - j^2 \bar{\omega}^2) Q_{nj}^* + \bar{P}_0 \sum_{k=1}^{\infty} K_{nk}^* Q_{kj}^* + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} S_{nk}^* Q_{kj}^* + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \left(Q_{kj}^* R_{nk} + \frac{1}{2} S_n^* P_{nk} \right) Q_{kj}^* + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nk}^* Q_{kj}^* Q_{km}^* = -\gamma_n \delta_{ij} \rho \quad (5)$$

ここに、 $j=0,1,2$ δ_{ij} : Kroneckerのdelta関数, $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}(i \neq j)=0$, Q_{kj}^* , Q_{km}^* : Q_{nk}^* の関数

式(3)の過渡解をも含んだ応答を求めるには式(3)を直接数値積分すればよい。

3 数値計算例 両端ヒンジの偏平アーチを対称および非対称振動の自由度をそれぞれ1つ採用すれば、式(3)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_1 + (1 + \frac{1}{2} \Delta^2) T_1 + \frac{3}{4} \Delta T_1^3 + \frac{1}{4} T_1^5 + (1 + T_1) T_2 = -\gamma \rho \cos \bar{\omega} t, \quad \ddot{T}_2 + 16 T_2 + 4 T_2^3 + (2 \Delta + T_1) T_1 T_2 = 0 \quad (6)$$

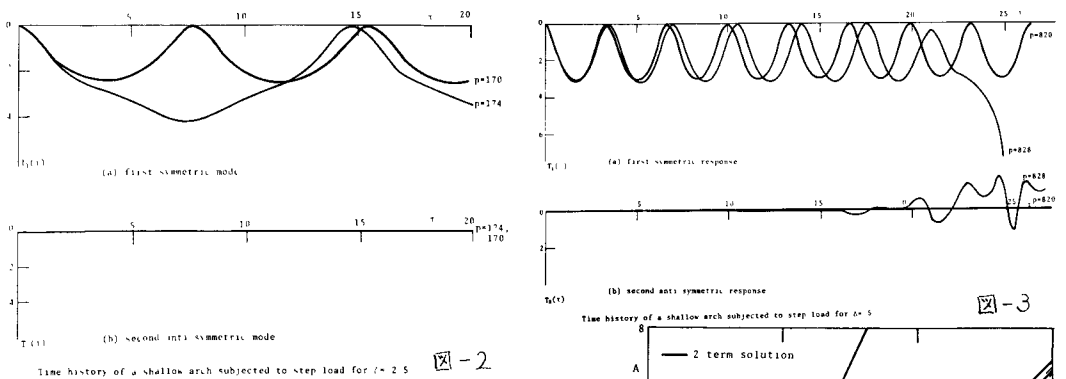


図-2

式(6)の第2式は係数励振形の微分方程式であり、対称振動の自由度 T_1 によって逆対称振動の自由度 T_2 が生ずる。式(6)の第1式の荷重強度 $k\omega\bar{w}$ が一定の場合の $\Delta=2.5$ および 5.0 に対する応答を図-2 および3に示す。ライズが小さい場合 ($\Delta=2.5$) には $k=170\sim 174$ の範囲で対称な動的な飛び乗り座屈が生じており、逆対称振動は励振されない。一方、ライズが比較的大きくなると ($\Delta=5.0$)、まず、対称振動 T_1 が生じ、かなりの経続時間のうち逆対称振動 T_2 が係数励振され、 T_1 と T_2 の相互作用のもとに間接的に動的飛び乗りが生ずる。このように偏平アーチにおいてはライズによって生ずる現象が異なってくるのがわかる。次に対称な非線形曲げ振動の定常解を明らかにする。 $\Delta=3$ の荷重強度 $k=80$ に対する応答曲線を求めれば図-3、4に示すとおりである。図-4には調和バランス法の2項近似解 ($x_1 = a_0 + a_1 \cos \omega t$) および3項近似解 ($x_1 = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t$) がプロットされ、また、図-5には4項近似解 ($x_1 = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t$) がプロットされている。2項近似解では $\omega=2.35$ 付近の主共振のみが生じている。主共振の応答曲線が軟硬の2つの背骨曲線を持つために、同位相および逆位相の定常解に振幅の跳躍現象が生ずることが予想される。3項近似解では $\omega=2.35$ の主共振の他に $\omega=1.17$ 付近に2倍の高調波共振が生じている。直線はりの非線形応答では見受けられない現象で初期変形による2次の非線形項が存在するためである。なお、図-1の荷重-変形曲線に示されているように同一の荷重に対して複数の変位が存在するために非線形応答にも動的飛び乗り後の定常解が存在するが、図-1においては省略されている。2倍の高調波共振が振幅比4付近で不連続となっているが、これは動的飛び乗り後の解の影響が入ってくるためである。図-5の4項近似解にはさらに $\omega=6.70$ 付近に3倍の高調波共振がえらわれている。これらの高調波共振はいずれも主共振に付随して生ずる応答である。多自由度としての取扱および動的安定問題などは講演時に発表する。

参考文献

- 1) 高橋，中島：土木学会第31回年次学術講演会概要集第1部，昭和51.10.

図-3

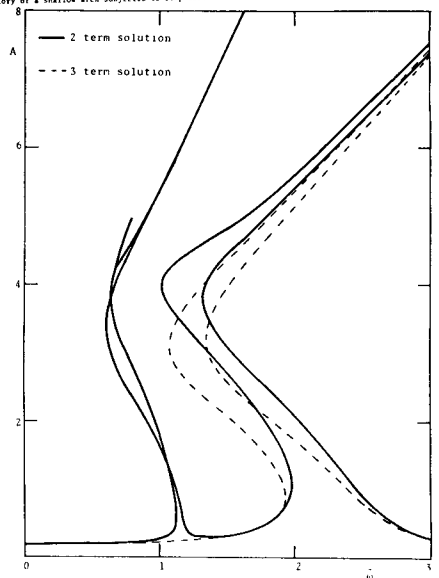


図-4 Amplitude-frequency curves of a simply-supported shallow arch for $\Delta=3$

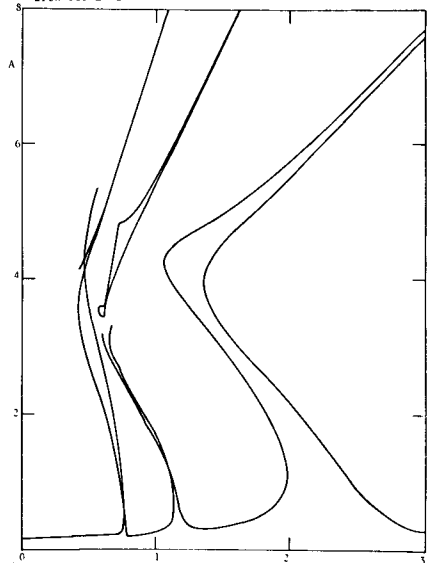


図-5 Amplitude-frequency curves of a simply-supported shallow arch for $\Delta=3$