

—透過性構造物への適用—

熊本大学 工学部 正員 〇滝川 清
熊本大学 工学部 正員 田村 幹修

1. はじめに 前回までに、波動問題への有限要素法の適用として、流体域下の微小振幅波動および有限振幅波動の解析^{1),2)}を示しているが、今回は、透過性構造物など流体抵抗の存在する領域への適用を微小振幅波動の場合について行なったので、ここにその解析手法について報告する。

2. 基礎式 図-1に示す2次元の領域で、静水面に座標原点をおき、水平にX軸、鉛直上向きにY軸をとる。周波数 $\omega (=2\pi/T)$, T は周期)の入射波

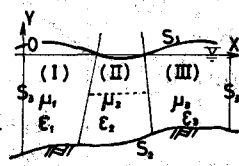


図-1 解析領域

による流体の運動を考える。境界 S_1, S_2, S_3 で囲まれた領域を、透率率 $\epsilon_j (j=1, 2, 3)$ の異なる透過性領域 I, II, III に区分する。各領域内の流体の運動は、流速に比例した線形の抵抗を受けるとして、その係数を μ_j とすると、運動は速度ポテンシャル $\phi_j = \phi_j(x, y)e^{i\omega t}$ ともち、各領域内部での連続の式および運動の式は次のように表現できる。

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{1}{g\epsilon_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \mu_j \nabla^2 \phi_j \right) + \rho_j / \rho_0 + y = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{ここに、} \frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{\epsilon_1} (1 + (1 - \epsilon_j) C_{nj})$$

(C_{nj} : 附加質量係数)

また、水表面では、圧力 $p_j = 0$ であるから

$$\rho_j = -\frac{1}{g\epsilon_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \mu_j \nabla^2 \phi_j \right) \text{ および } \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \quad \text{--- ③}$$

水底など不透過な境界 S_2 では

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = 0 \quad (n: \text{外向き法線方向余弦}) \quad \text{--- ④}$$

流体中の左右解析境界 S_3 では

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \quad (j, k=1, 2, 3) \quad \text{--- ⑤}$$

とする。⑤は解析領域外部の速度ポテンシャルを意味する。一方、各領域の境界面では、たとえば、領域 I, II の境界条件は、

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \frac{\partial \phi_k}{\partial n}$$

$$H = \rho_j / \rho_0 + y = -\frac{1}{g\epsilon_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \mu_j \nabla^2 \phi_j \right) = -\frac{1}{g\epsilon_k} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \mu_k \nabla^2 \phi_k \right) \quad \text{--- ⑥}$$

これは、mass-flux および energy-flux を規定するのである。

以上、解析としては、式⑥の条件の下に式①～式⑤と解く事になるが、ここでは以下のように考える。

運動の周期性を考慮して $H = H e^{i\omega t}$ とすると式⑥より

$$\left. \begin{aligned} \phi_j &= -\rho_j H \\ \rho_j &= g\epsilon_j / (i\omega + \mu_j \nabla^2) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- ⑦}$$

このHを用いると、各条件式は

$$\left. \begin{aligned} \text{領域内部;} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_j \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_j \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \\ \text{水表面;} & i\omega H|_{y=0} = -\rho_j \frac{\partial H}{\partial y}|_{y=0} \\ \text{境界} S_2; & -\rho_j \frac{\partial H}{\partial n} = 0 \\ \text{境界} S_3; & \rho_j \frac{\partial H}{\partial n} = \rho_k \frac{\partial H}{\partial n} \quad (H_0 = -\frac{1}{\rho_1} \phi_1) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- ⑧}$$

となる。ただし、領域が流体のみの場合には、 $\epsilon_j = 1, \mu_j = 0$ とすればよい。

3. 変分原理 式⑧で示される境界値問題に対して次の汎関数を考える。

$$\chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left(\rho_j \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \rho_j \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy - \int_{S_1} H \delta \rho_j - \int_{S_3} M H \delta S_3 \quad \text{--- ⑨}$$

ここに、変分を受ける独立量はHのみである。この変分を取り結果のみ示すと次のようである。

$$\delta \chi = - \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_j \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_j \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] \delta H dx dy + \int_{S_1} \left(\rho_j \frac{\partial H}{\partial n} - L \right) \delta H dS_1 + \int_{S_2} \left(\rho_j \frac{\partial H}{\partial n} \right) \delta H dS_2 + \int_{S_3} \left(\rho_j \frac{\partial H}{\partial n} - M \right) \delta H dS_3 \quad \text{--- ⑩}$$

すなわち、式⑨の汎関数と停留にする条件として、式⑩の条件式がすべて得られる。ただし、上式中 $L = -i\omega H, M = \rho_j \frac{\partial H}{\partial n}$ である。

4. 有限要素法による定式化 解析領域 V を三角形要素群に分割して、1つの要素 i, j, m 内の $H(x, y)$ をその節点値 $\{H\}^T = \{H_i, H_j, H_m\}$ で表現すると

$$H(x, y) = [N_i, N_j, N_m] \{H\} = [N] \{H\} \quad \text{--- ⑪}$$

ここに、 $[N]$ は三角形要素の形状関数である。また、これらの係数マトリックスに関する詳細は、文献1)と参照されたい。これから、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{H\} = B \{H\} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \{H\} = C \{H\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- ⑫}$$

また、境界 S_1, S_2 では、境界上の節点 i, j における値を用いて、

$$H = [N_i, N_j] \{H\}, L = [N_i, N_j] \{L\}, M = [N_i, N_j] \{M\} \quad \dots (13)$$

と表すことにする。式(12), 式(13)を用いて, 式(11)を表す。

$$\lambda = \frac{1}{2} \sum_i \{H\}^T (\beta_i B B^T + \beta_i C C^T) \{H\} \Delta - \sum_i \{H\}^T \{L\} - \sum_i \{H\}^T \{M\} \quad \dots (14)$$

ここに, $S = \int_{\Omega} [N_i, N_j]^T [N_i, N_j] ds$, Δ : 三角形の面積であり, $\sum_i, \sum_j, \sum_k$ は, それぞれ解析領域 Γ および境界 Γ_1, Γ_2 に関する総和を意味する。この式(14)に, 先に示す変分原理を適用して, $\{L\} = -i\omega \{H\}, \{M\} = \beta_j \left\{ \frac{\partial H}{\partial n} \right\}$ を用いると, 次の連立方程式が得られる。

$$\beta_i \sum_j (B B^T + C C^T) \{H\} \Delta + i\omega \sum_j S \{H\} - \beta_j \sum_k S \left\{ \frac{\partial H}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots (15)$$

5. 境界処理

入射および通過位置での速度ポテンシャルを次のように表現する。

$$\begin{aligned} \Phi_{0, \text{inc}} &= i \frac{gA}{\omega} (e^{-ik_0 x_0} + A_r e^{ik_0 x_0}) \frac{\cosh k_0 (h+y)}{\cosh k_0 h} e^{i\omega t} = -\beta_j H_{0, \text{inc}} \\ \Phi_{0, \text{out}} &= i \frac{gA}{\omega} A_t \frac{\cosh k_0 (h+y)}{\cosh k_0 h} e^{i\omega t} = -\beta_j H_{0, \text{out}} \end{aligned} \quad \dots (16)$$

ここに, A : 入射波振幅, k_0, k_0 および h, h はそれぞれの位置における波数および水深を意味する。また, A_r, A_t は反射波および通過波を表す定数である。

この式(15)と式(16)に代入して得られる連立方程式は, 節点数に等しい数の $\{H\} = A_r, A_t$ の未知量を含むが, 結局は, 反射波および通過波に関する未知量の数(ここでは A_r, A_t の2個)だけ条件式が不足する。(この際, 新たな条件式として, 境界 Γ_2 での energy-flux (250) の連続を考慮することにする。ここで, mass-flux (250) は, すなわち汎関数中に導入して, これを考慮している)ので結局このことは近似的に次式で表わされる。

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} ds = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} ds \quad \dots (17)$$

この積分を水底から静水面まで行なうと, 入射および通過位置で次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_i \sum_j S \{H\} + i \frac{gA}{\omega k_0} e^{ik_0 x_0} \cdot \tanh k_0 h \cdot A_r \\ = -i \frac{gA}{\omega k_0} e^{-ik_0 x_0} \cdot \tanh k_0 h \\ \beta_j \sum_k S \{H\} + i \frac{gA}{\omega k_0} \tanh k_0 h \cdot A_t = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (18)$$

ここに, $S = \int_{\Omega} [N_i, N_j]^T ds$ である。

以上, 式(15)と式(18)を連立して解くことにより, 全未知量が決定され, 他の諸量も次のように求めることができる。

(i) 通過率 K_T および反射率 K_R

$$K_T = |A_t|, \quad K_R = |A_r| \quad \dots (19)$$

(ii) 表面波形 η

$$\eta = H(x, 0) e^{i\omega t} \quad \dots (20)$$

(iii) 速度ポテンシャル Φ_j

$$\Phi_j = -\beta_j [N_j] \{H\} e^{i\omega t} \quad \dots (21)$$

6. 適用計算例 図-2 は, 図中に示す形状の半透過な潜堤の反射率 K_R および通過率 K_T を計算した結果であり, 上記の解析方法の検証を行なったものである。

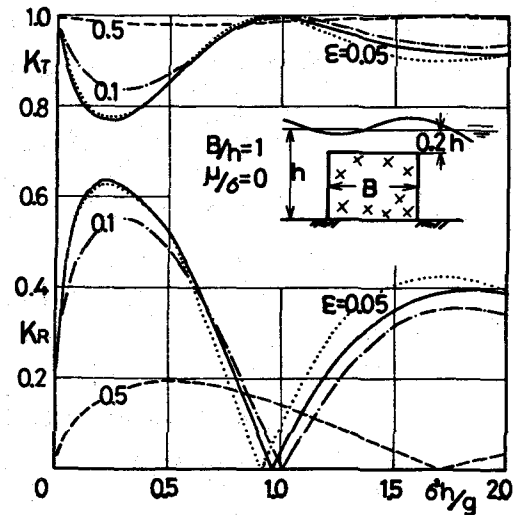


図-2 透過潜堤の反射率および通過率

透過潜堤の抵抗係数 $\mu/g = 0$ として, 空障率 ϵ は 0.5, 0.1, 0.05 と変化させると, 図中に実線下示した不透過な潜堤の場合^{2), 3)} に漸近して行くことがわかる。またこの時, $K_R^2 + K_T^2 = 1.0$ であり, さらに, $\epsilon = 1.0$ (流体のみとする) とすると, 当然ながら, $K_R = 0.0, K_T = 1.0$ なる結果が得られている。なお計算に際しての要素分割は, 水深方向に 20 分割, x 軸方向に 60 分割を行ない, 全要素数 2,400, 全節点数 1281 である。

7. あとがき 有限要素法の透過性領域への適用としてここでは微小振幅波動の場合について解析方法を示したが, 非定常な波動の場合についても解析検討中である。

参考文献

- 1) 渡川, 田淵; 有限要素法による非定常波動解析について, (1), (2) 昭和52年度, 船舶工学研究会論文集 pp. 173~174, pp. 175~176
- 2) 渡川, 田淵; 有限要素法による波動解析について, 第1報 1978, 第25号, 海洋工学研究会論文集 pp. 28~32
- 3) 井島, 武士, 佐々木, 雄雄; 潜堤の効果に関する理論的研究 1977, 第18号, 海洋工学研究会論文集 pp. 161~167