

九州大学 学生員 〇長野 益徳
 " 正会員 神野 健二
 " " 上田 年比古

1. まえがき 近年、水資源の不足により地下水の有効利用が唱えられ最適取水問題^{1,2)}についての研究が進められつつある。着者は、広域地下水場からの定常取水について線形計画法を用いた最適取水計画と研究している。しかし、広域地下水場を対象とした場合、境界条件の時間的変動など、非定常の要素が多く含まれている。そこで、本報では、対象とした被圧地下水場などにおいて、境界が時間的に変動する場合などの、非定常時の最適取水問題を、最大原理を用いて、考察したものである。

2. 有限要素法による基礎式の離散化 基礎式は被圧帯水層において、Darcy則と連続の式より $\partial(k\partial\phi/\partial x)/\partial x + \partial(k\partial\phi/\partial y)/\partial y - (\lambda/b) \sum_{m=1}^M Q_m \delta(x-x_m) \delta(y-y_m) - (\lambda/b) \partial\phi/\partial t = 0$ (1) であり、ここに k : 透水係数、 λ : 貯留係数、 b : 帯水層厚、 Q_m : 井戸 m の取水量、 $\delta(x, y)$: デルタ関数、 (x_m, y_m) : 井戸 m の座標、(1) 式に対する汎関数は、 $\chi(h) = \frac{1}{2} \iint \{ k(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2 \} dx dy + \iint (\lambda/b) \{ \sum_{m=1}^M Q_m \delta(x-x_m) \delta(y-y_m) + \lambda \partial\phi/\partial t \} h dx dy$ (2) となる。

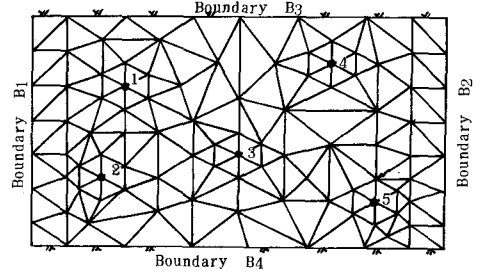


図-1 被圧浸透領域 (1~5 は制御井戸)

いま図-1のような、被圧浸透領域を考へ、これを図のように任意の三角形に分割する。ここで境界 B_1, B_2 は、境界条件として水頭を与へ $h = H_1(t), h = H_2(t)$ (3), 境界 B_3, B_4 は、不透水壁とし $\partial\phi/\partial n = 0$ (4) とする。以上から有限要素法により、次の状態方程式を得る。 $C \dot{h} = S h + F Q$ (5)

3. 最適問題の定式化³⁾ 非定常時の最適取水を考えると、定常の場合と同様に水位と取水量の両方からの最適状態を考へるべきである。そこでまず、目的関数としては、ある一定の時間内に取水量を最大にするように、 $J = \int_{t_1}^{t_2} \sum Q_m dt \Rightarrow \max$ (6) とし、取水量に対する制約条件としてポンプの取水量などから $Q_{\min} \leq Q_m \leq Q_{\max}$ (7) とする。次に、水位に対する条件として取水状態での最低水位の位置は井戸地裏であることから、井戸水位に条件を付し、最終時間 t_f において $h_m(t_f) = h_{\max}$ (8) とすると、これは、(6) 式を評価関数とし、(7) 式、(8) 式を制約条件とする最適制御問題に帰着される。そこで、条件付制御問題として最大原理を用いて解くものとする。まず、状態方程式は、(5) 式を変形し、 $\dot{h} = A^{-1} S h + A^{-1} F Q = A h + B Q$ (9) (ここに $A = C^{-1} S, B = C^{-1} F$) であり、評価関数が(6)式、制約条件が(7)式、(8)式である。最大原理より、状態方程式(9)を考慮して問題と極値問題として取扱うために、未知関数の補助変数ベクトル $\psi(t)$ を導入して、評価関数(6)式に状態方程式を考慮した新たな関数として $H(h, \psi, Q, t) = \psi^T \dot{h} - \sum Q_m$ (10) を作れば、(6) 式と(9) 式もともに最大にすることは、(10) 式を最小にすることと同値になり、いま h^*, Q^* と求める最適ベクトルとすれば、 $H(h^*, \psi, Q^*, t) \underset{Q_{\min} \leq Q_m \leq Q_{\max}}{\min} H(h, \psi, Q, t)$ (11) である。 h^*, Q^* が最適である条件は、最大原理より $\dot{\psi}_i = -\partial H / \partial h_i$ (12), $\dot{h}_i = \partial H / \partial \psi_i$ (13) が成立することである。ここで、(10) 式は、 $H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\psi_i(t) A_{ij} h_j(t) + \psi_i(t) B_{ij} Q_j(t)] - \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_i(t) A_{ij} h_j(t) + \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^n \psi_i(t) B_{ij} - 1] Q_i$ (11) である。 H を最小にする Q_i は、 $\sum_{j=1}^n B_{ij} \psi_j(t) - 1 = \omega_i$ (14) とすれば、 $\omega_i > 0$ では、 Q_i のとりうる範囲の最小値 $Q_{\min}$ となり、 $\omega_i < 0$ では、最大値 $Q_{\max}$ となる。したがって、時間の経過により ω_i の符号が変わるとき、 Q_i が $Q_{\min}$ と $Q_{\max}$ の間を切り変わることになる。すなわち、制御関数 $Q_i(t)$ が補助変数ベクトル $\psi(t)$ によって規定される。 $\psi(t)$ は、(12) 式、(11) 式よりえられる。 $\dot{\psi}_i = -\partial H / \partial h_i = -\sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j$ 或 $\dot{\psi} = -A^T \psi$ (15) から求められる。また、(11) より $\dot{h}_i = \partial H / \partial \psi_i = \sum_{j=1}^n [A_{ij} h_j + B_{ij} Q_j]$ すなわち、 $\dot{h} = A h + B Q$ (16) となり(9) 式と同じ式がえられる。また、境界条件は、(i) 初期条件 $h(t_0) = h_0$ (17), (ii) 終端条件 $h_m(t_f) = h_{\max}$ (18) である。ただし、終端条件の規定は、井戸の奥のみでは自由とする。補助変数ベクトルについては、 $\psi_i(t_f) = 0$ (19) (i : 水頭の終端条件が自由のもの)。制御法則の解析は、(17)~(19) 式の条件を入れて、(15), (16) 式により算定する。その計算のフローチャートを図-2 に示す。

4. 計算例 計算は図-1に示す領域において、制御対象の井戸を5個とし図中に●1~5とする。また、帯水層厚 $b=15.0\text{cm}$ 、透水係数 $k=0.35\text{cm/sec}$ 、貯留係数 $\lambda=0.03$ とした。計算例は、(i)では、境界の水位変化がなく、 $H_1(t)=20.0\text{cm}$, $H_2(t)=20.0\text{cm}$ 、初期条件 $h(t_0)=20.0\text{cm}$ 、終端条件 $h_m(t_f)=15.0\text{cm}$ の条件で、取水量の制約条件 $Q_{mL} \leq Q_m \leq Q_{mH}$ (7)において $Q_{mL}=0.0\text{cm}^3/\text{s}$, $Q_{mH}=50.0\text{cm}^3/\text{s}$ とした。一定時間 $t_0=0.0$ から $t_f=15.0\text{sec}$ の間に $J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{m=1}^5 Q_m dt \Rightarrow \max$ (6) となるもの。(ii)境界 B_2 の水位が時間的に直線変化する、 $H_2(t)=20.0+0.2t\text{cm}$, $H_1(t)=20.0\text{cm}$ 、同様の取水量条件(7)式、および目的関数(6)式のもの。(iii)境界条件 $H_1(t)=20.0\text{cm}$, $H_2(t)=23.0-0.2t\text{cm}$ とし、取水量の制約条件(7)式の Q_{mH} を初期の $H_1=20.0\text{cm}$, $H_2=23.0\text{cm}$ で井戸水位をすべて 15.0cm にした場合の定常状態の各井戸の取水量とし、 Q_{mL} と終端の $H_1=20.0\text{cm}$, $H_2=20.0\text{cm}$ 、井戸水位をすべて 15.0cm にした場合の定常取水量の各井戸の取水量とした。

(i)(ii)(iii)の制御変数 Q_m の切換時及び、各井戸水頭の計算結果を図-3, 4, 5に示す。ここで制御法則を規定するものは、 Ψ 及び η であり、これらはそれぞれ(45), (46)式で示されるように、考える領域の形状及び透水係数、貯留係数で決まる時性量のマトリクス A, B の関数となり、図-3の結果からみられるように、境界から遠く、取水しにくい井戸1, 3, 4の切換時が井戸2, 5に比べ早い。また、(iii)の場合 B_2 境界の水位が上昇する下め(i)に比べ B_2 に近い井戸4, 5の切換時が遅くなっている。また切換時及に及ぼす影響因子として井戸の制約流量も考えられ、(iii)の例のように各井戸の制約流量として初期及び終端での定常状態の取水量を用いた場合、切換時が(i), (ii)などに比較して、同じ時間集中しており、それぞれの井戸に対する流量によっても切換時が影響を受ける。

5. おまけ 一般に広域地下水場では、地下水位の高い豊水期と、地下水位の低い渇水期が存在し、これら両時期には、それぞれ、定常状態としての既報の線形計画法による最適取水状態が算定され、各井戸の最適取水量 Q_H, Q_L を求めることができる。したがって、この両時期の移行期間において、 Q_H から Q_L に相互に切換する時刻の決定が必要となるが、本解析手法によって、この切換の最適時刻を求めることができるものと考ええる。なお、切換時刻近傍では、井戸水位が下り、これが許容の値限界水位以下になることも生じることが考えられ、今後の検討事項と考える。なお、これについては、水位低下が期間的に短いことから、ある程度許されるものではないかと考えられる。

参考文献

- 1) 上田, 神野, 長野 「井戸群による地下水の最適取水について」 水資源シンポジウム 1977.
- 2) 上田, 神野, 長野 「地下水の最適取水について」 オゾ3回年次講演会 1978.
- 3) 正田英介著 「最適制御理論」 現代自動制御双書, コロナ社 1972.

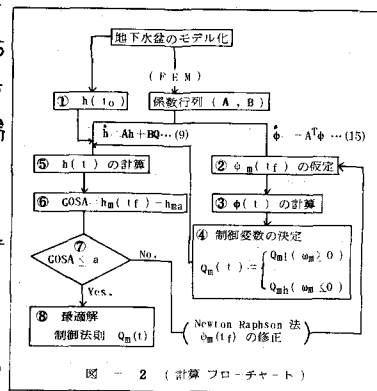


図-2 (計算フローチャート)

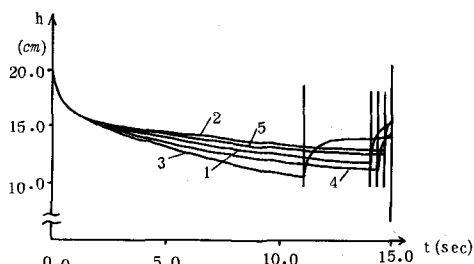


図-3 (計算例 (i))

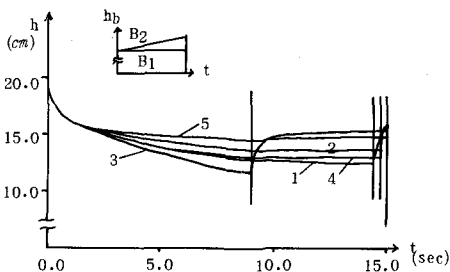


図-4 (計算例 (ii))

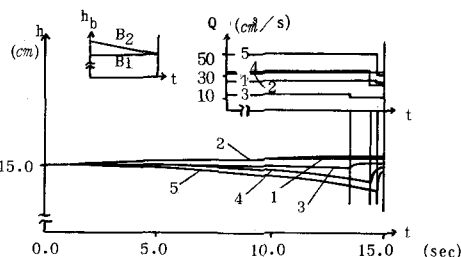


図-5 (計算例 (iii))