V－16　埋立層下における汚染の長期予測手法

福岡大学　理学部　正員　○大西和榮
〃　　工学部　〃　　黒木健実
〃　　〃　　〃　　花嶋正孝

1. まえがき　廃棄物埋立による地下水汚染の特徴として，井上等[1]は（1）汚染が比較的狭い範囲に限られること，（2）汚染原因物質の移動・伝播速度が遅いこと，したがって影響が現われるまでに長時間を要すること，（3）一度汚染が生ずると，その継続時間が極めて長いこと，（4）汚染源の数が通常は単数で，汚染の質が時間と共に変化しうること，等々を指摘し，汚染の予測時間スケールが長くなることを強調している。廃棄物層と埋立層下の不飽和土層における汚染を長期予測する場合，まず汚染物質を溶解，運搬する浸透水の長期的変化を明らかにする必要がある。不飽和土中の浸透問題については，これまでにいくつかの差分解[2]や有限要素解[3]が求められているが，時間方向へ Step by step に解いていくために，非線形性が強い場合 10 年間程度の長期にわたる計算量は膨大なものとなり現実の使用に耐えない。

本報では，2 次元不飽和土中準定常浸透問題の近似解法として，有限要素法により空間座標に対して離散化した浸透方程式を，Mode 解析と Fourier 解析とを援用して解くことを考察し，1 年を周期として廃棄物層に供給される雨水の長期的な浸透状態を計算した。

2. 基礎方程式　筆者等[4]によると不飽和土中の浸透方程式は有限要素法により

$$[H(\theta)]\{\theta\}+[M]\frac{d}{dt}\{\theta\}=\{K(\theta)\}+\{R(t)\} \qquad \text{------(1)（文献4の式8.a）}$$

$$\{q\}=-[G(\theta)]\{\theta\}+\begin{Bmatrix}0\\K_z(\theta)\end{Bmatrix} \qquad \text{------(2)}$$

と定式化できる。ここに $\{\theta\}$：節点含水率（m^3/m^3），$\{q\}=(q_x,q_z)^T$：Darcy 流束（m/month），(x,z)：空間座標(m)，K_z：深さ方向の透水係数（m/month），$\{R(t)\}$ は廃棄物層表面 Γ_3 からの雨水の供給相当量を表わし表面積分 $\int_{\Gamma_3}[N]^T q_B(t)d\Gamma$（ただし，$q_B$：浸入雨量（m/month），$[N]$：形状関数）で与えられる。一般に水分拡散係数 D_x，D_z（m^2/month）と K_z は含水率 θ に依存するから，式 (1), (2) の $[H]$，勾配行列 $[G]$，$\{K\}$ は $\{\theta\}$ に依存し，非線形方程式となり Mode 解析が困難であるため，本報では，これらの量における $\{\theta\}$ は代表的な値におきかえて計算を進める。更に $[H]$ は半正値対称行列，$[M]$ は正値対称行列である。

3. Mode 解析[5]と FFT[6]　式 (1) の右辺を $\{0\}$ と置き換えた方程式の一般解を $\{\theta\}=C\{x\}e^{-\lambda t}$（ただし C：任意積分定数）とおいた時の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（1/month ただし，$0\leqq\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_n$）と対応する固有 Mode $\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_n\}$（ただし，$\{x_i\}^T[M]\{x_j\}=\delta_{ij}$ と正規化しておく）を求めて，それらを列ベクトルとする Modal matrix $[S]=[x_1|x_2|\cdots|x_n]$ を作る。式 (1) に変換 $\{\theta\}=[S]\{u\}$ を施すと，非連成な方程式

$$\mathrm{dig}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]\{u\}+\frac{d}{dt}\{u\}=\{C\}+\{f(t)\} \qquad \text{------(3)}$$

を得る。ここに $\{C\}=[S]^T\{K\}$，$\{f\}=[S]^T\{R\}$。　式 (3) の第 i 成分について，初期値 $u_i(0)$ に応ずる解は Duhamel 積分

$$u_i(t)=\int_0^t(C_i-f_i(\tau))e^{-\lambda_i(t-\tau)}d\tau+u_i(0)e^{-\lambda_i t} \qquad \text{------(4)}$$

で表される。ただし，初期値ベクトル $\{u(0)\}=[S]^T[M]\{\theta(0)\}$。さて，浸入雨量 q_B が FFT により有限 Fourier 級数

$$q_B(t)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}A_k\cos(\rho kt)+\frac{1}{2}A_{\frac{N}{2}}\cos(\rho\frac{N}{2}t)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}B_k\sin(\rho kt) \qquad （ただし\ \rho=2\pi/12,\ 1/\mathrm{month}）$$

で与えられるとき，式 (1) の $\{R\}$ は形式的に

$$R_i(t)=\frac{1}{2}a_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}a_k^{(i)}\cos(\rho kt)+\frac{1}{2}a_{\frac{N}{2}}^{(i)}\cos(\rho\frac{N}{2}t)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}b_k^{(i)}\sin(\rho kt) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

と書かれる。よって式 (3) の $\{f\}$ は，関係 $f_i(t)=\sum_{j=1}^{n}s_{ji}R_j(t)$ により Fourier 級数で書かれる。

今，添字νについて固有値 $\lambda_\nu=0$ とすると，$1\ll t$ なる時，式(4)は漸近的に

$$U_\nu \simeq C_\nu t-\left\{\frac{p_{\nu 0}}{2}t+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{p_{\nu k}}{\rho k}\sin(\rho kt)+\frac{p_{\nu\frac{N}{2}}}{2\rho\frac{N}{2}}\sin\left(\rho\frac{N}{2}t\right)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{q_{\nu k}}{\rho k}(1-\cos(\rho kt))\right\}+U_i(0)$$

また，$\lambda_i\neq 0$ に対して式(4)は漸近的に

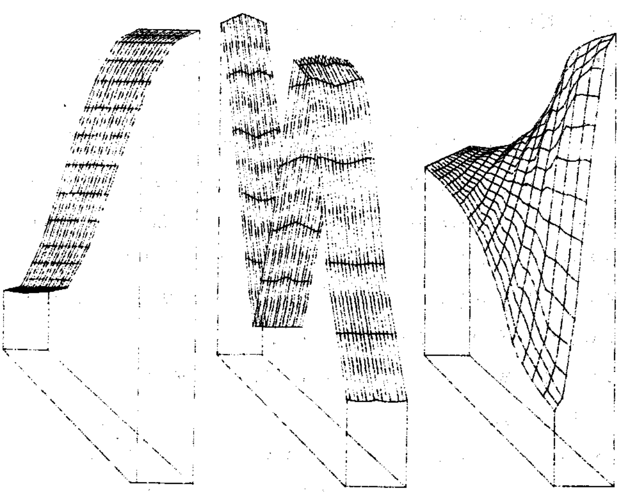
$$U_i \simeq \frac{C_i}{\lambda_i}-\left\{\frac{1}{2}\mathcal{A}_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\mathcal{A}_k^{(i)}\cos(\rho kt)+\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\frac{N}{2}}^{(i)}\cos\left(\rho\frac{N}{2}t\right)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\mathcal{B}_k^{(i)}\sin(\rho kt)+\mathcal{B}_{\frac{N}{2}}^{(i)}\sin\left(\rho\frac{N}{2}t\right)\right\}$$

と計算される。ここに，$\mathcal{A}_0^{(i)}=\frac{p_{i0}}{\lambda_i}$ ，$\mathcal{A}_k^{(i)}=\frac{p_{ik}\frac{\lambda_i}{\rho k}-q_{ik}}{\rho k(1+\lambda_i^2/(\rho k)^2)}$ ，$\mathcal{A}_{\frac{N}{2}}^{(i)}=\frac{p_{i\frac{N}{2}}\cdot\lambda_i}{(\rho\frac{N}{2})^2+\lambda_i^2}$ ，$\mathcal{B}_k^{(i)}=\frac{p_{ik}+q_{ik}\frac{\lambda_i}{\rho k}}{\rho k(1+\lambda_i^2/(\rho k)^2)}$ ，$\mathcal{B}_{\frac{N}{2}}^{(i)}=\frac{p_{i\frac{N}{2}}}{\rho\frac{N}{2}(1+\lambda_i^2/(\rho\frac{N}{2})^2)}$
$(k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1)$。更に $i=1,2,\cdots,n$ についてそれぞれ $p_{ik}=\sum_{j=1}^{n}s_{ji}a_k^{(j)}$ $(k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2})$
$q_{ik}=\sum_{j=1}^{n}s_{ji}b_k^{(j)}$ $(k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1)$ である。総和記号 $\sum_{i=1(i\neq\nu)}^{n}$ を $\sum_{i=1}^{n}{}'$ で表わすと，式(1)の解 $\{\theta\}$ は漸近的に

$$\theta_m\simeq\left(\sum_{i=1}^{n}{}'s_{mi}\frac{C_i}{\lambda_i}+s_{m\nu}U_\nu(0)\right)+s_{m\nu}\left(\frac{p_{\nu 0}}{2}-C_\nu\right)t-\left\{\left(\frac{1}{2}\alpha_0^{(m)}+s_{m\nu}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{q_{\nu k}}{\rho k}\right)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(\alpha_k^{(m)}-s_{m\nu}\frac{q_{\nu k}}{\rho k}\right)\cos(\rho kt)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\alpha_{\frac{N}{2}}^{(m)}\cos\left(\rho\frac{N}{2}t\right)+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(\beta_k^{(m)}+s_{m\nu}\frac{p_{\nu k}}{\rho k}\right)\sin(\rho kt)+\frac{1}{2}\left(\beta_{\frac{N}{2}}^{(m)}+s_{m\nu}\frac{p_{\nu\frac{N}{2}}}{\rho\frac{N}{2}}\right)\sin\left(\rho\frac{N}{2}t\right)\right. \qquad \text{------(5)}$$

となる。ここに，$m=1,2,\cdots,n$ に対し，それぞれ $\alpha_0^{(m)}=\sum{}'s_{mi}\mathcal{A}_0^{(i)}$ ，$\alpha_k^{(m)}=\sum{}'s_{mi}\mathcal{A}_k^{(i)}$ $(k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1)$，$\alpha_{\frac{N}{2}}^{(m)}=\sum{}'s_{mi}\mathcal{A}_{\frac{N}{2}}^{(i)}$ ，$\beta_k^{(m)}=\sum{}'s_{mi}\mathcal{B}_k^{(i)}$ $(k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1)$ ，$\beta_{\frac{N}{2}}^{(m)}=\sum{}'s_{mi}\mathcal{B}_{\frac{N}{2}}^{(i)}$ 。継いで式(2)に $\{\theta\}$ を代入してDARCY流束のFOURIER展開を求めることができる。

4. 計算結果 ZYVOLOSKI et al.[7] の $D(\theta)=3.33\times10^{-5}\mathrm{Exp}(24.34\theta)$ $\mathrm{cm^2/min}$ ，$K(\theta)=3.33\times10^{-3}\mathrm{Exp}(54.11\theta)$ cm/min より求められた各MODEを図1に示す($\theta=0.2$)[6]。更に明治24年から30年間の熊本市における雨量統計より求めた浸入量(=降雨量の60%)を入力した場合の地下における深さ方向のDARCY流束の年周期変動を図2に示す。



$\lambda_2=0.319186\times10^{-3}$ $\lambda_4=0.326563\times10^{-2}$ $\lambda_6=0.857678\times10^{-2}$

図1. 低次の固有値と固有MODE

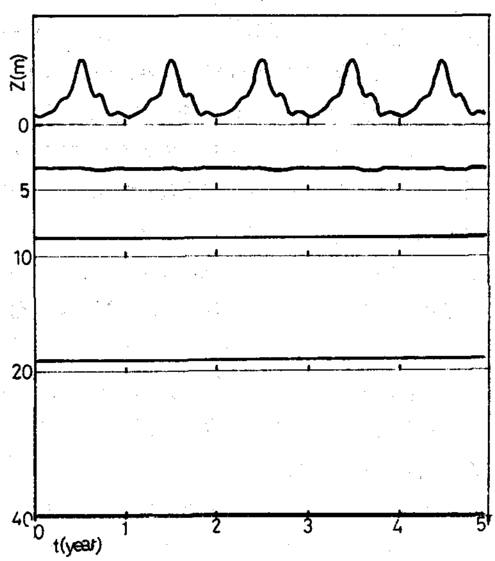


図2 地下Z(m)におけるDARCY流束の年周期的変動

5. むすび 埋立層下へ年周期で浸透雨水が供給される場合の漸近的な浸出水のパターンを求めた。地表での時間的変動は地下へ進むに従って速やかに平滑化されていくことが分った。同様の手法を使って，汚染物質拡散の長期予測が出来る。

1) 井上頼輝他，第29回廃棄物処理対策全国協議会全国大会講演集 (1978) 2) Selim,H.M. et al., Proc. Soil Sci. Soc. Amer. Vol.37, No.4 (1973) 3) 赤井浩一他，土木学会論文報告集，No.264 (1977) 4) 大西和榮他，52年度土木学会西部支部研究発表会講演集 5) Przemieniecki,J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill (1968) 6) 森正武，曲線と曲面，教育出版 (1974) 7) Zyvoloski,G. et al., Soil Science, Vol.122, No.2 (1976)