

九州大学工学部 正員 栗谷陽一

九州工業大学 正員 ○藤崎一裕

1. まえがき

流速分布をもつ流れの中に投入された物質は、乱流混合以外に速度差にもとづく伸長効果をうける。この現象は縦分散または移流分散ともよばれ、通常の乱流拡散に比べてその分散効果は著しく大きい。この種の分散現象は、物質の保存式を用いて、厳密に解析することが理論的には可能である。しかし、より実用的な便法として、水深方向に平均した濃度の（流下方向の）変化を拡散方程式を用いて巨視的に取扱う手法が多く用いられる。

沈降性のない物質の縦分散については、すでにいくつかの検討がなされており、沈降性粒子についても、水路底部に沈積した粒子が完全に再浮上する場合（水路系内で物質保存則が成立する場合）について、その分散係数を求める試みが発表されている²⁾。本報では、水路底に沈積した粒子の再浮上を考えない場合について、類似の現象の解析を試みに。

2. 基礎式

図1のように座標をとり、粒子濃度を C 、沈降速度を w 。とすると、保存則および境界条件は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (uC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C \right) \quad (1)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C = 0 \quad ; \quad (y = h) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad ; \quad (y = y_0) \quad (2.2)$$

(y_0 : $u=0$ となる y の値)

となる。2次元等流状態を考え、流速分布にお数分布を仮定すると、次式となる

$$\frac{u}{u_*} = A + \frac{1}{K} \ln \frac{u_* y}{\nu} = \frac{1}{K} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3)$$

$$D = \beta \cdot K u_* y (1 - y/h) \quad (4)$$

$A=5.5$, $\beta=1.0$, $K=0.4$ とした。 u_* : 摩擦速度である。

ここで、濃度 C の x 方向の変化は小さいとして、移動座標 x_1 で展開して1次の項までとり、勾配のあることによる補正項を付加して次式で表す。

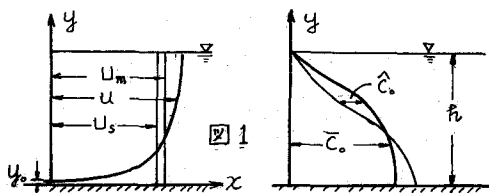
$$C(y,t) = \bar{C}(y,t) (1 + \alpha x_1) + \alpha \hat{C}(y,t) \quad (5)$$

ここで、 α : 定数、 $\bar{C}(y,t)$ は次式の解である

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + w_0 \bar{C} \right) \quad (6)$$

さらに、上式を変数分離してえられる常微分方程式の最低次の固有値 λ 。および固有関数 $\bar{C}_0(y)$ を用いて、 $\bar{C}(y,t)$ を次式で表す

$$C(y,t) = \{ \bar{C}_0(y) (1 + \alpha x_1) + \alpha \hat{C}_0(y) \} e^{-\lambda t} \quad (7)$$



$$x_1 = x - u_s t \quad (8)$$

$$u_s = \frac{\int_{y_0}^h u(y) \cdot \bar{C}_0(y) dy}{\int_{y_0}^h \bar{C}_0(y) dy} \quad (9)$$

とすると、(5)、(8)式と(1)式とから

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} + \hat{u}_s \bar{C} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \hat{C}}{\partial y} + w_0 \hat{C} \right) \quad (10)$$

$$\hat{u}_s = u - u_s$$

となる。さらに、上式に(7)式を代入して

$$\frac{d}{dy} \left(D \frac{d\hat{C}_0}{dy} + w_0 \hat{C}_0 \right) = -\lambda_0 \hat{C}_0 + \hat{u}_s \bar{C}_0 \quad (11)$$

がえられる。このときの境界条件は下の2式となる

$$D \frac{d\hat{C}_0}{dy} + w_0 \hat{C}_0 = 0 \quad ; \quad (y = h) \quad (12.1)$$

$$d\hat{C}_0/dy = 0 \quad ; \quad (y = y_0) \quad (12.2)$$

(11)式を整理して(13)式がえられる

$$\bar{y}(1-\bar{y}) \frac{d^2 \hat{C}_0}{d\bar{y}^2} + (1-2\bar{y}+Z) \frac{d\hat{C}_0}{d\bar{y}} + \lambda_0 \hat{C}_0 = \hat{u}_s \bar{C}_0 \quad (13)$$

$$\bar{y} = y/h, \quad Z = w_0/(K u_*), \quad \hat{u}_s = \hat{u}_s/(K u_*) \quad (14)$$

(13)式の解は、(10)式と(6)式との類似性を利用して、(6)式の0次以外の固有関数で、(13)式の右辺を展開して求めた。

ここで、(1)式を(5)式および境界条件を考慮して、全水深にわたって平均して次式で表わす。

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + U_s \frac{\partial C_m}{\partial x} = \frac{1}{h} \int_{y_0}^h \hat{u}_s \hat{C} dy - \lambda_0 C_m \quad (15)$$

$$C_m = \frac{1}{h} \int_{y_0}^h C(y) dy \quad (16)$$

(15)式右辺の1項が移流分散を生じる項で、分散係数 $D_L(Z)$ は次式で表わされる。

$$-D_L(Z) \frac{\partial C_m}{\partial x} = \frac{1}{h} \int_{y_0}^h \hat{u}_s \hat{C} dy \quad (17)$$

本報の場合、以上の検討から D_L は次式で求められる。

$$\frac{D_L}{h U_*} = -K \int_{\bar{y}}^1 \hat{u}_s \hat{C} d\bar{y} \quad (\bar{y} = y/h) \quad (18)$$

また、この場合の分散現象は次式で近似される(流下方向の乱流拡散は微小項として無視した)。

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + U_s \frac{\partial C_m}{\partial x} = \frac{D_L}{K h U_*} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} - \lambda_0 C_m \quad (19)$$

$$\bar{t} = t / (h / (K U_*)), \quad \bar{x} = x / h, \quad \bar{U}_s = U_s / (K U_*) \quad (20)$$

なお、水路底部においても(2.1)式が成立する場合には、(5)式の $\bar{C}$ に Rouse 分布を用いると、 $\hat{C}$ が積分表示できて、次式がえられる。

$$\frac{D_L}{h U_*} = -K \frac{\sin(\pi Z)}{\pi Z} \int_0^1 \hat{u}_s \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z d\bar{y} \times \int_0^{\bar{y}} \hat{u}_s \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z \frac{d\bar{y}}{\bar{y}(1-\bar{y})} \times \int_0^{\bar{y}} \hat{u}_s \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z d\bar{y} \quad (Z < 1) \quad (21)$$

上式は、Sumerlによりモーメント法で導かれた式⁽²⁾と一致する。

3. 計算結果

図2に Z の値に対する $\bar{C}_m(\bar{y})$ を、図3に $\hat{C}_m(\bar{y})$ を示す。図2中の破線は Rouse 分布に対応する。図4は、(18)式で求めた D_L の値と Z との関係を示す。参考までに(21)式でえられる D_L^2 の値も記した。 D_L^2 に比べて、 D_L の値が小さめに出ているのは、Rouse 分布に比べて、図2の $\bar{C}_m(\bar{y})$ の水深方向の変化が小さいためであろう。

図5は、計算結果の一応用例として、 $\bar{x} = 1$ で $C = 1$

図2

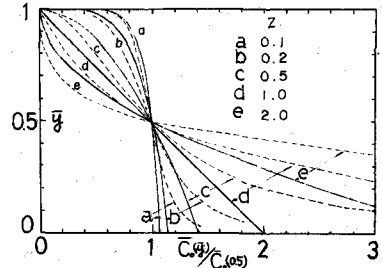


図3

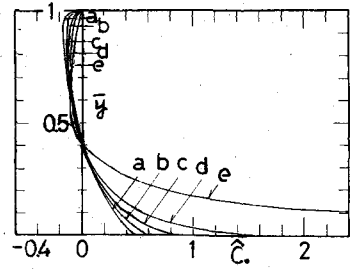


図4

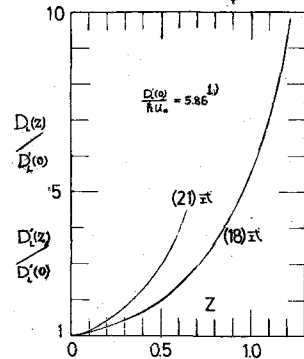
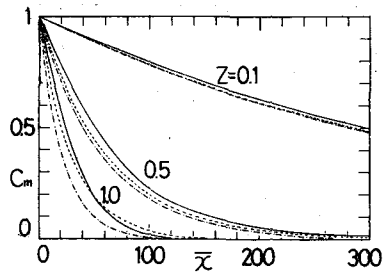


図5



として、定常状態における濃度分布を(1)式と(19)式で比較したものである。(一点鎖線は(19)式で分散項を無視したもの)図から Z の値が大きいくほど、分散効果が著るしい様子がわかる。(計算値は $Re = U_* h / \nu = 30,000$ の場合の値である。)

参考文献

- 1) Elder, J.W.: J. Fluid Mech., vol.15, 1959, pp.544~560
- 2) Sumer, B.M.: J. Fluid Mech., Vol.65, 1974, pp.11~28

- 3) 栗谷 藤崎: 土木学会論文報告集, 72775, 1978, pp.133~136