

九州大学 工学部 正員 椿 東一郎
九州大学 大学院 学生員 〇 菅原 稔
九州大学 工学部 学生員 溝口 忠昭

1. まえがき

静止した一様密度 ρ_a の流体中に密度 ρ_0 の流体 ($\rho_0 < \rho_a$) を断面 A_0 の噴出口により初期速度 U_0 で放出させる鉛直上昇プリュームの浮上拡散については Abraham, Priestley, 林らにより研究が行なわれ、確立領域についてはかなりの程度まで明らかにされている。一方、potential core の存在する形成領域については浮力の効果により複雑な挙動を示すにもかかわらず、簡単に幾何学的に処理されているにすぎない。今回我々は形成領域について新たに理論的解析を行ない、確立領域における Priestley の解と接続することにより幅広い出口内部 Froude 数に対して良く成立する理論解を得たので報告する。

2. 理論的解析

(確立領域) 放出口を原点にとり、プリュームの拡がり幅の半径方向に r 軸、鉛直方向に x 軸を考える。現象を規定する基礎式としては単位質量あたりの浮力を $B = g(\rho_a - \rho) / \rho_a$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial x}(rUB) + \frac{\partial}{\partial r}(rWB) = -\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{w}b) \quad (\text{拡散方程式}) \cdots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(rU^2) + \frac{\partial}{\partial r}(rWU) = \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \frac{T}{\rho}) + rB \quad (\text{運動方程式}) \cdots (2)$$

となる。ここで、浮力、流速およびせん断力の分布に対し相似性を仮定する。

$U = U_c f(\eta)$, $B = B_c h(\eta)$, $\overline{T} = \frac{1}{2} U_c^2 j(\eta)$, $\eta = \frac{r}{R}$... (3) 図-1 流れの模式図

ここに、 U_c , B_c は軸上の流速および浮力である。(3)式を用いて(1),(2)を $r=0 \sim \infty$ で積分すると、 $f = h = \exp(-0.5\eta^2)$ の分布形を用いることにより簡単な形をとり次のようになる。

$$\frac{d}{dx}(R^2 U_c B_c) = 0 \cdots (4), \quad \frac{d}{dx}(R^2 U_c^2) = 2 B_c R^2 \cdots (5)$$

また(2)式に U をかけて $r=0 \sim \infty$ で積分すると平均流エネルギーの方程式として

$$\frac{d}{dx}(R^2 U_c^3) = -C R U_c^3 + 3 R^2 B_c U_c \cdots (6)$$

が得られる。ここに $C = \int_0^\infty \eta f \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta / \int_0^\infty \eta f^2 d\eta$ である。

(6)×2-(5)× U_c の操作により $dR/dx = C$... (7)

となり、今、新たに仮想原点 $x=0$ に point source をもつような x 座標を考えると $R = Cx$ (8) が得られる。(8)式を(6)式に代入すると U_c に関する Bernolli 型の微分方程式となり解析解が得られ次のようになる。

$$U_c = \left\{ \frac{3}{2} \frac{N_0}{\pi c^2} \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^3} \right\}^{1/3} \cdots (9) \quad \text{また式(4)より} \quad B_c = \frac{N_0}{\pi c^2} \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{3}{2} \frac{N_0}{\pi c^2} \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^3} \right\}^{-1/3} \cdots (10)$$

となる。ここに N_0 は浮力 flux で $N_0 = A_0 U_0 B_0$ (B_0 は出口における浮力) で与えられる。また C_1 は仮想原点での momentum flux M_0 で表わされ、 $C_1 = (1/\pi c^2)^{2/3} M_0^{2/3}$ (11) となる。 C の値は Priestley が与えた $C=0.1$ を用いる。式(9),(10)を用いるにあたって実際の噴出口と仮想原点の位置関係および M_0 の評価が次の問題となってくる。

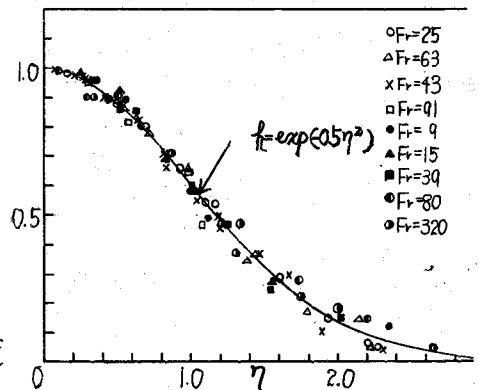
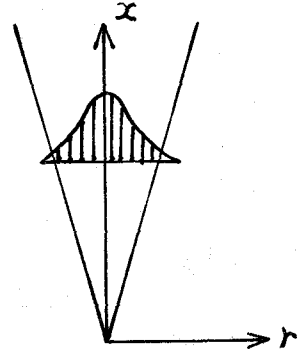
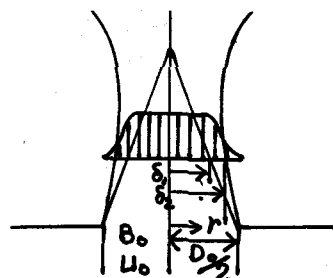


図-2 半径方向の浮力分布

(形成領域) 形成領域では potential core の部分と混合領域とからなる。potential core 部も浮力の影響を受けて加速されるため流速は増加する。流速・浮力分布を次のように考える。potential core 内では r 方向に一定で混合領域内では相似性を仮定する。



流速分布 (i) $0 \leq r \leq S_1$; $U = U_0$, (ii) $S_1 \leq r$; $U = U_0 f(\eta)$ (12)

浮力分布 (i) $0 \leq r \leq S_1$; $B = B_0 (=const)$, (ii) $S_1 \leq r$; $B = B_0 h(\eta')$

ここに $\eta' = (r - S_1) / (S_2 - S_1) = (r - S_1) / R'$

式(11), (12)および(13)を $r=0$ から積分すると $f = h = \exp(-0.5\eta'^2)$ 図-3 形成領域内の流れの模式図

といて次のようになる。 $\frac{d}{dx} [U_0^2 (S_1^2 + \sqrt{\pi} S_1 R' + R'^2)] = 0 \dots (13)$, $\frac{dU_0}{dx} = \frac{\pi B_0^2}{N_0} (S_1^2 + \sqrt{\pi} S_1 R' + 2R'^2) \dots (14)$

$$\frac{d}{dx} [U_0^2 (\frac{3}{2} S_1^2 + \sqrt{\pi} S_1 R' + R'^2)] = -(\alpha S_1 + C R') + B_0 U_0 (3 S_1^2 + 3 \sqrt{\pi} S_1 R' + 3 R'^2) \dots (15)$$

ここに $\alpha = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta / \int_0^\infty \eta f^2 d\eta$

式(13)~(15)で U_0, S_1, R' を $U_0, \Delta_1, \bar{R}$ (D_0 : 放出口の直径)で無次元化すると上記3式は $\bar{U} = U_0 / U_0, \Delta_1 = S_1 / (D_0/2), \bar{R} = R' / (D_0/2)$ を規定する式となりパラメータとして $Fr = \frac{U_0^2}{\sqrt{B_0} \frac{D_0}{2}}$ を含む。

$Fr = \infty$ の homogeneous jet の場合に $\xi = x / (D_0/2) = 0$ で potential core が消失する (Allerton の実験より) という条件より、 $\alpha = 0.026$ が得られる。

$\xi = 0$ で $\Delta_1 = 1, \bar{R} = 0, \bar{U} = 1$ の境界条件を用いて式(13)~(15)を数値計算することにより、任意の Fr 数に対する

potential core 消失点での $\xi_p, \bar{U}_p, \bar{R}_p$ を求めることができる。 $\xi = \xi_p$ で確立領域の噴流特性量表示式(13)~(15)に接続させねばならないことから、仮想原点から ξ_p までの距離を式(8)を用いて求める。すなわち

$R = Cx$ より $x_p / (D_0/2) = \bar{R}_p / C \dots (16)$

したがって実際の放出口より仮想原点までの距離 ξ_c は $\xi_c = x_p / (D_0/2) - \xi_p \dots (17)$ より求められる。

また、仮想原点における momentum flux M_0 も $x = x_p$ で $\bar{U} = \bar{U}_p$ の条件から求められる。得られた M_0 は実際の噴出口における momentum flux $M_{00} = A_0 U_0^2$ との比 M_0 / M_{00} の形で ξ_c とともに、図-4に噴出口の内部Froude数 Fr の値に対して示されている。

$Fr > 20$ 以上では momentum flux M_0 が漸次しているため $\xi_c, M_0 / M_{00}$ はともにほぼ一定であるが、 $Fr < 20$ では浮力のため、縮流などを生じて流れは大きく変形し、 $M_0 / M_{00}, \xi_c$ はともに大きくなる。

以上求めた $\xi_c, M_0 / M_{00}$ を用いて得られた理論値と著者らや Abraham の実験値を比較したのが図-5である。確立領域では式(9), (10)を M_0, N_0 を用いて無次元化するとパラメータ Fr が消えて、理論解が一つの曲線で表わされる。理論値と実験値の一致は非常によく、理論の展開上 Fr はんらの制限をも加えてないなどから、実用上の意義も大きいものと思われる。

今後は Fr 数の小さい実験を行ない理論値との比較検討を行なう予定である。なお、本研究に協力してくださった小松助一氏に謝意を表す。

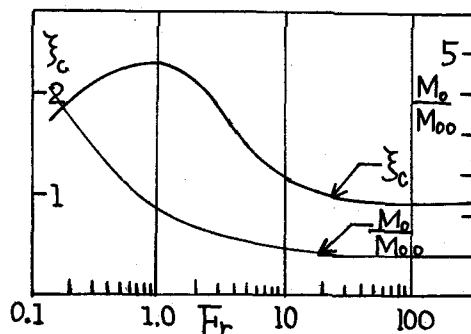


図-4 Fr と $\xi_c, M_0 / M_{00}$ の関係

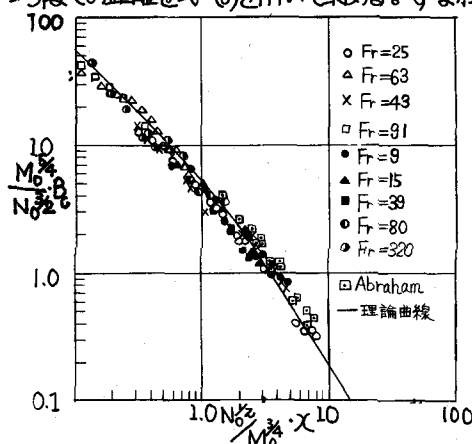


図-5 理論曲線と実験値の比較