

九州大学 工学部 正員 小松 利光
九州大学 工学部 〇学生員 下田 隆久

1. まえがき

海面上に放出された温排水の拡がりや河口における河川水の拡散問題については横分モデルによる理論的研究が活発に行なわれ、多くの知見が得られてきた。先に著者らは flow force M_0 , 浮力 flux N_0 が保存されることに着目し、拡散幅や表面浮力、表面流速などの噴流特性量を M_0, N_0 をそれぞれ無次元化した一般的な表示式を得たが、今回新たに横分モーメント法の概念に基づく解析を行ない、実験結果をより良く説明できる理論解を得たので報告する。

2. 理論的解析

x 方向、 y 方向の運動方程式および拡散方程式は、単位質量あたりの平均浮力を $B = \delta(p_a - p)/\rho_a$ として次のようである。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_z^\infty B dz + \frac{\partial}{\partial y} (K_H \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_V \frac{\partial U}{\partial z}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \int_z^\infty B dz + \frac{\partial}{\partial x} (K_H \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_V \frac{\partial V}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}^2 - \bar{w}^2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \quad (3)$$

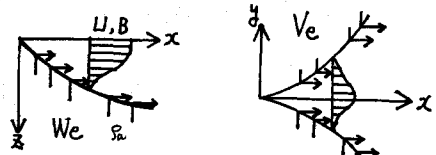


図-1 流れの模式図

$$U = U_0 f_1(\eta) f_2(\xi), \quad B = B_0 m_1(\eta) m_2(\xi), \quad \eta = y/\delta, \quad \xi = z/\lambda \quad (4)$$

噴流拡散幅 δ , 噴流水深 λ はそれぞれ B が噴流中心軸上表面浮力 B_0 の $1/2$ となる点で定義されている。

また、横方向からの連行速度を V_c とすると横方向の連行係数 E を用いて次のように表わされる。

$$V_c = E U_0 f_2(\xi) \quad (5)$$

連続の式を $y = 0 \sim \delta$, $z = 0 \sim \infty$ の範囲で横分すると若干の計算の後、 $V = V_0 f_3(\xi)$ として

$$V = \left\{ \frac{I_0}{I_1} U_0 \frac{d}{d\xi} \left[\eta f_1 - \frac{I_0}{I_1 I_1} E U_0 f_2(\xi) \right] f_2(\xi) \right\} f_3(\xi) \quad \text{ここに } I_1 = \int_0^\infty f_1 d\eta, I_2 = \int_0^\infty f_2 d\xi, I_3 = \int_0^\infty f_3 d\xi, F(\eta) = \int_0^\eta f_1 d\eta \quad (6)$$

と表わされる。決定すべき未知数は $U_0, \delta, \lambda, E, B_0$ の5個であり、式(1),(2),(3)を $z = 0 \sim \infty$, $y = 0 \sim \infty$ で横分して得られる式および(1)× U , (2)× V を同じく $z = 0 \sim \infty$, $y = 0 \sim \infty$ で横分して求めた横分モーメント式が基礎式となるが、ここでは簡単のため、横方向の連行係数 $E = \text{const}$ とする。したがって、 E を規定する式である y 方向の運動方程式(2)の横分形は用いない。水平・鉛直方向の渦動粘性係数及び $\bar{v}^2 - \bar{w}^2$ を次式

$$K_H = x_1 \psi(\eta, R_i) \sqrt{\lambda} U_0 f_1, \quad K_V = x_2 \phi(\eta, R_i) \lambda U_0 f_1, \quad \bar{v}^2 - \bar{w}^2 = x_3 \psi^2(\eta, R_i) U_0^2 \lambda^2 f_1^2 f_3 \quad (7)$$

のようにおく。ここに x_1, x_2, x_3 は比例定数、 ψ, ϕ は浮力による乱流構造の変化を表わす関数で、二次元表面密度噴流の解析結果を用いる。また flow force M_0 , 浮力 flux N_0 が保存される流れであることから噴流特性量を M_0, N_0 を用いて無次元化する。

$$H \equiv \frac{N_0^{1/2} \lambda}{M_0^{3/4}}, \quad \Delta \equiv \frac{N_0^{1/2} \delta}{M_0^{3/4}}, \quad \xi \equiv \frac{N_0^{1/2} z}{M_0^{3/4}}, \quad \bar{B} \equiv \frac{N_0^{1/2}}{M_0^{3/4} B_0} \quad (8)$$

一方、三次元表面噴流における overall Richardson 数として、 $R_i = N_0 / (2 U_0^3 \delta)$ を導入すると(1)式、(2)式の横分は(9)式を用いてそれぞれ次のように表わされる。

$$\Delta^{3/2} H = \frac{r_1 R_i^{3/2}}{1 + r R_i} \dots\dots\dots (9), \quad \bar{B} = r_0 \frac{\Delta^{3/2} R_i^{3/2}}{1 + r R_i} \dots\dots\dots (10)$$

同様に式(1)×(1), 式(2)×(1)の積分は式(1), (2)を用いて次のように表わされる。

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{H}{R_i} \right] = -\gamma_2 \frac{dH}{d\xi} + \gamma_3 R_i H \Delta \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{R_i \Delta} \right] - \gamma_4 \frac{H}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi} - \gamma_5 \chi_1 \psi_1(R_i) \frac{1}{R_i \Delta} - \gamma_6 \chi_2 \phi_1 \frac{1}{R_i} \dots (11)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_7 \frac{d}{d\xi} \left[\frac{H}{R_i} \left(\frac{d\Delta}{d\xi} \right) \right] - \gamma_8 \frac{d}{d\xi} \left[E \frac{H}{R_i} \left(\frac{d\Delta}{d\xi} \right) \right] + \gamma_9 \frac{d}{d\xi} \left[\frac{E^2 H}{R_i} \right] - E^3 \frac{H}{R_i \Delta} \\ &= \gamma_{10} \frac{H}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi} - \gamma_{11} E \frac{H}{\Delta} + \gamma_{12} \chi_1 \frac{d}{d\xi} \left[\psi_2(R_i) \frac{H}{R_i} \left(\frac{d\Delta}{d\xi} \right) \right] - \gamma_{13} \chi_1 \frac{d}{d\xi} \left[\psi_3(R_i) E \frac{H}{R_i} \right] \\ &- \gamma_{14} \chi_1 \psi_4(R_i) \frac{H \Delta^{1/2}}{R_i^{3/2}} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{R_i^{1/2} \Delta^{1/2}} \frac{d\Delta}{d\xi} \right] + \gamma_{15} \chi_1 \psi_4(R_i) \frac{H}{R_i \Delta} \left(\frac{d\Delta}{d\xi} \right)^2 \\ &+ \gamma_{16} \chi_1 \psi_5(R_i) \frac{1}{R_i} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{dH}{d\xi} + \gamma_{17} \chi_1 \psi_5(R_i) \frac{\Delta^{1/2} H}{R_i^{3/2}} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{E}{R_i^{1/2} \Delta^{1/2}} \right] \\ &- \gamma_{18} \chi_1 \psi_5(R_i) \frac{EH}{R_i \Delta} \frac{d\Delta}{d\xi} - \gamma_{19} \chi_1 \psi_6(R_i) \frac{E}{R_i} \frac{dH}{d\xi} \\ &+ \gamma_{20} \chi_1 \psi_6(R_i) \frac{H}{R_i \Delta} \frac{d\Delta}{d\xi} - \gamma_{21} \chi_1 \psi_6(R_i) \frac{EH}{R_i \Delta} - \gamma_{22} \chi_1 \psi_7(R_i) \frac{1}{R_i} \left(\frac{d\Delta}{d\xi} \right)^2 \\ &+ \gamma_{23} \chi_1 \psi_7(R_i) \frac{E}{R_i} \frac{d\Delta}{d\xi} - \gamma_{24} \chi_1 \psi_7(R_i) \frac{E^2}{R_i} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに $\gamma_1 \sim \gamma_{24}$ は $f_1 = e^{-0.9277^2}$, $f_2 = f_3 = e^{-0.9275^2}$, $m_1 = e^{-0.6972^2}$, $m_2 = e^{-0.6935^2}$ のように流速分布・浮力分布に Gauss 形を仮定することにより求まる定数である。 ψ , χ 等 ψ , χ により表わされる関数である。上の諸式で $R_i \rightarrow 0$ の極限が均一流体の表面噴流である。均一流体の場合の諸量に米をつけて表わすと, permanent type であるため条件から指数の値が求まり, それぞれ $H_b = a_1 \xi$, $\Delta_b = a_2 \xi$, $R_{ib} = a_3 \xi^2$, $B = a_4 \xi$, $E = E_b = a_5$ (13) となる。係数 $a_1 \sim a_5$ は上式を式(1)~(12)に代入した式から求まることになる。

3. 数値計算と実験結果との比較

仮想原点 $x=0$ に表面密度噴流の point source が存在するとし, 境界条件 $\xi=0$ で, $H=\Delta=R_i=B=0$, $E=E_b=0.058$, $d\Delta/d\xi=a_2$ のもとに式(1)~(12)の連立常微分方程式をとき, B, H, Δ の計算結果を図2~4に示した。これらの理論曲線は $\xi=0$ において均一表面噴流の式(13)に接し, ξ が増すとともに浮力影響が表われてくる。図2~4には Jen, Wiegel, Motarek, Tamei, Wiegel, Tornberg および著者の実験結果が示されているが良く一致している。特に図4には point source とはみなしにくい出口での Richardson 数 R_{io} が 1.0 程度の実験のデータも記しているがほぼ一致しており, 図2~4を用いることにより任意の出口条件の表面噴流に対し, 容易に噴流特性量を評価することができる。なお, 本研究は橋本一郎教授の指導のもとに行なわれたものである。

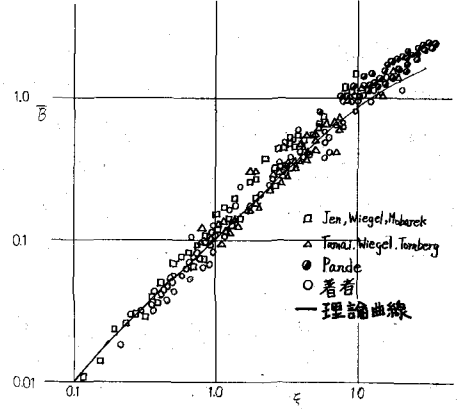


図2 表面浮力Bと流下距離ξとの関係

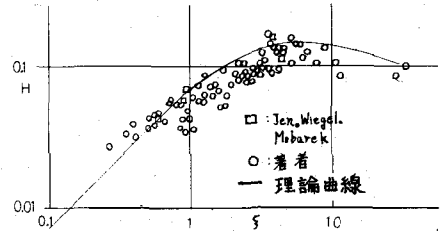


図3 水深Hと流下距離ξとの関係

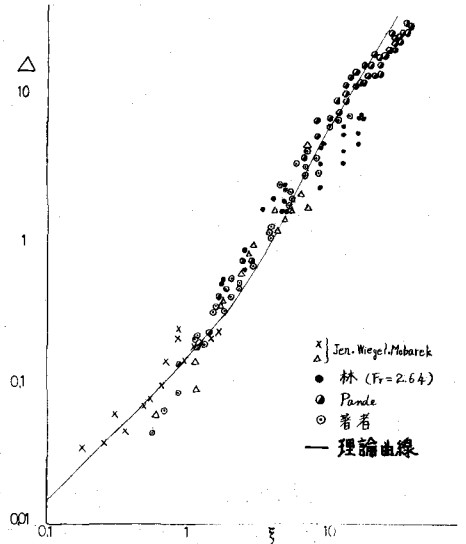


図4 噴流幅Δと流下距離ξとの関係