

II-2 楕円柱に対する水の付加質量係数について

九州大学工学部 正員 小坪清真
九州工業大学 正員 高西照彦
九州工業大学 学生員 川西政雄

1. まえかき

水中に存在する構造物の解析および設計に関する問題点の一つとして、地震時に外力として働く動水圧の問題がある。そして、水中構造物が振動する場合、構造物のまわりの水の一部が付加質量としてそれに作用することはすでによく知られている。現在までにも理論的、実験的研究が数多く行われており、水中構造物に対する動水圧および水の付加質量の問題が詳細に説明されている。円柱のような簡単な横断面を持つ構造物に対しては、粘性を考慮した際の動水圧の理論解が導かれ、模型実験によってもその妥当性を示されている⁽²⁾。しかしながら実際の基礎構造物は円形断面だけに限らず種々の断面のものも建造されている。本研究においては、まず楕円柱の粘性を考慮した2次元動水圧を理論的に求め、かつ楕円柱に対する模型実験を行なって、この理論値と実験値との比較をした。次に種々の断面を持つ構造物に対して理論的に動水圧を求めることのできる方法として、最近注目されている有限要素法の流体力学への応用の一環であるシンワ・ソース法によって円形・楕円形の理想流体中における動水圧を求めて、厳密解との比較を行ってその精度を確認した。実際の基礎構造物では径が大きい場合、粘性による影響は小さいとみられる。したがってシンワ・ソース法は小判形・く形断面等を有する水中構造物の動水圧の解析に用いることのできる、その適用範囲が広い。著者らは、小判形・く形断面の2次元動水圧をも求めたがここでは円形・楕円形の動水圧だけ述べることにする。

2. シンワ・ソース法による動水圧の算定

流体を理想流体と仮定する。この方法は物体の境界を有限個の折線で近似し、折線上にそれぞれ一定の強さをもつ線源を分布させ、線源によって誘起される速度場において境界条件、すなわち、流体は物体中を貫ぬいて流れないという条件を満足させるようにして線源の強さを求める。

線源の長さ、強さをそれぞれ l , σ とするとその線源により誘起される速度ポテンシャルは、 x - y 座標系の原点を線源の中心に x 軸を線源に沿って定めると

$$\phi = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma \log \sqrt{(x-\tau)^2 + y^2} d\tau$$

である。それぞれの σ を求めるには、下記のような σ に対する連立一次方程式を解くといふ。

$$\begin{cases} \bar{V}_{11}\sigma_1 + \bar{V}_{12}\sigma_2 + \dots + \bar{V}_{1n}\sigma_n = \bar{V}_1 \\ \bar{V}_{21}\sigma_1 + \bar{V}_{22}\sigma_2 + \dots + \bar{V}_{2n}\sigma_n = \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_{n1}\sigma_1 + \bar{V}_{n2}\sigma_2 + \dots + \bar{V}_{nn}\sigma_n = \bar{V}_n \end{cases}$$

ただし、 $\bar{V}_{ij} = V_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) - U_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)$

すなわち、シンワ・ソース法によれば、境界である閉曲線を有限個の折線の集まりで表わせるので円形はもちろんのこと、任意形状の構造物の動水圧も求めることができる。

図-2はシンワ・ソース法での円形・楕円形の分割数 n による付加質量係数（振動方向に直角な面に投影した長さを径とする円柱が排除した水の質量に対する水の付加質量の比）の変化を表わす。

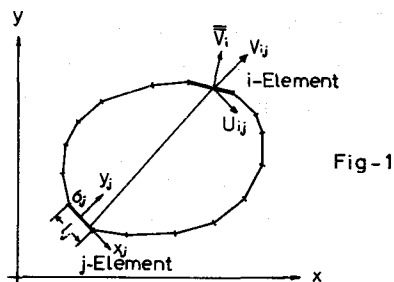


Fig-1

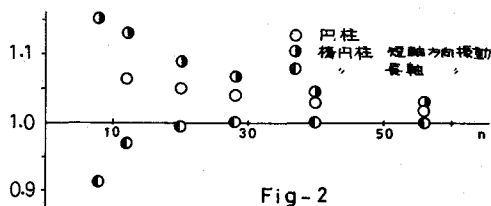


Fig-2

3. 粘性を考慮した場合の楕円柱への水の付加質量

楕円柱のまわりの水の運動に対して Navier-Stokes の方程式が成り立つわけであるが、構造物が地震によって振動する時は、楕円の径に比べて振動の変位振幅が小さいので Navier-Stokes の方程式において速度の2乗の項は無視できるものとして、楕円柱に対する水の付加質量および減衰定数を求める。

長軸 $2a$ 、短軸 $2b$ なる楕円柱が水中で減衰自由振動を行う場合を考える。この時振動方向は長軸の方向とする。水分子の運動方程式は楕円座標 (α, β) における次のようになる。 $C = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{h}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \nu \left\{ h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) + C^2 h^2 \sin 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - C^2 h^2 \sinh 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{2} C^2 h^4 (\cosh 2\alpha + \cos 2\beta) u \right\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{h}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \nu \left\{ h^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right) - C^2 h^2 \sin 2\beta \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + C^2 h^2 \sinh 2\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} - \frac{1}{2} C^2 h^4 (\cosh 2\alpha + \cos 2\beta) v \right\}$$

また連続の式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{h} \right) = 0$$

ここで、 u, v は α, β 方向の変位、 ν は動粘性係数

ρ_0 は水の密度、 ν は水の動粘性係数、 h は写像縮小率

また水の応力は

$$\sigma_\alpha = -p + 2\mu h \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{v}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) \quad \tau_{\alpha\beta} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial \beta} (hu) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (hv) \right)$$

ここで楕円柱が $\tau = D e^{-\gamma t + i\omega t}$ で長軸方向に一樣に剛振動をする場合、境界条件は

- i) 楕円表面 $\alpha = \alpha_0$ のとき $u = D(-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t + i\omega t} \cos \varphi \quad v = -D(-\gamma + i\omega) e^{-\gamma t + i\omega t} \sin \varphi$
- ii) $\alpha \rightarrow \infty$ とき $u = v = 0$

以上の式によって楕円柱の中心軸方向単位長と当たりの振動方向に対する水の抵抗力 F は

$$F = 4 \int_0^{\pi/2} [\sigma_\alpha \cos \varphi - \tau_{\alpha\beta} \sin \varphi]_{\alpha=\alpha_0} d\beta$$

$$= \left\{ -\pi \rho_0 b (-\gamma + i\omega)^2 D (bM_1 - aM_2) - 2\pi \mu D (-\gamma + i\omega) (M_2 - M_1 \frac{Gek(\alpha_0, \beta)}{Gek_1(\alpha_0, \beta)}) \right\} e^{-\gamma t + i\omega t}$$

$$M_1 = \frac{A_1^{(0)} Gek(\alpha_0, \beta) \sum A_{2n+1}^{(0)} B_{2n+1}^{(0)} (2\gamma+1) + A_1^{(0)} Gek_1(\alpha_0, \beta) \sum (B_{2n+1}^{(0)})^2}{B_1^{(0)} Gek_1(\alpha_0, \beta) \sum A_{2n+1}^{(0)} B_{2n+1}^{(0)} (2\gamma+1) + A_1^{(0)} Gek_1(\alpha_0, \beta) \sum (B_{2n+1}^{(0)})^2}$$

$$M_2 = \frac{B_1^{(0)} Gek_1(\alpha_0, \beta) \sum A_{2n+1}^{(0)} B_{2n+1}^{(0)} (2\gamma+1) + A_1^{(0)} Gek_1(\alpha_0, \beta) \sum (B_{2n+1}^{(0)})^2}{B_1^{(0)} Gek_1(\alpha_0, \beta) \sum A_{2n+1}^{(0)} B_{2n+1}^{(0)} (2\gamma+1) + A_1^{(0)} Gek_1(\alpha_0, \beta) \sum (B_{2n+1}^{(0)})^2}$$

$Gek(\alpha_0, \beta)$ は modified Mathieu function である。また $A_{2n+1}^{(0)}, B_{2n+1}^{(0)}$ は Mathieu function に特有の係数である。また $q = \frac{C^2(r-i\omega)}{4\nu}$ である。振動方向が短軸の場合も同様に求められる。

模型実験においては、楕円柱の両端にアルミ板をとりつけて行ったので、そのアルミ板による粘性もさきべのど、その抵抗力を F_2 とすれば F と F_2 をもちいて振動方程式を立てることによって水中におけるその模型の固有円振動数と減衰定数が求まる。振動方程式は次のようになる。

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k \xi - l F - F_2 = 0$$

ここで、 m は模型の全質量、 k はバネ定数、 l は楕円柱の長さ

模型全体への付加質量 W は

$$W = m \{ (\eta/\omega)^2 - 1 \}$$

で求まる。ここで η は模型の空気中での固有円振動数である。

実験方法としては、楕円柱の両端を $20\text{cm} \times 20\text{cm} \times 0.3\text{cm}$ のアルミ板で固定し、図-4に示すように模型全体を2本の針金(2mmφ)を通してコイルばねで水槽中につるし、これに上下方向自由振動を与えて、それぞれ水中および空気中における固有周期と減衰定数を測定した。

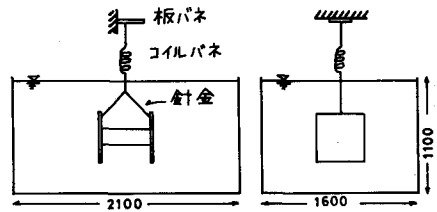


Fig-4 実験水槽(単位 mm)

理論の数値計算と実験との比較は当日発表の予定である。

- [参考文献] (1) 小坪清真：だ円形水中構造物に働く地震力とその弾性振動，土木学会論文集 No. 120 昭40, 8
- (2) 小坪清真，高西照彦：多柱基礎への水の付加質量について，土木学会論文集 No. 248 昭51, 4