

長崎大学工学部 学生員 内田靖夫

長崎大学工学部 学生員 竹内一博

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

1. 緒言 著者はこれまではりの非線形振動に関する解析的、実験的研究を報告してきた¹⁾。これより非線形自由振動および定常強制振動の振動数と振幅の関係の両者が良好な一致を示すことを確認した。しかし実験では理論結果に含まれない振幅の跳躍現象や対称振動によって逆対称振動が係数励振される連成振動が見受けられた。そこで本研究は著者が先に振幅安定判別法として提案した手法²⁾を用いてはりの非線形振動における振幅の安定性を解析した結果を報告するものである。

2. 解法 端部で軸方向変位が拘束された細長いはりに一様分布の周期荷重が作用した場合の運動方程式は次のように与えられる。
$$\Delta(u) = EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + PA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial u}{\partial x} - p \cos \omega t = 0 \quad (1)$$

ここに、 E ：はりのヤング率、 I ：断面2次モーメント、 γ ：たわみ、 x ：スパン方向の座標、 P ：質量、

A ：断面積、 C ：粘性減衰抵抗係数、 l ：スパン長、 t ：時間、 p ：外力の荷重強度、 ω ：外力の円振動数
式(1)を解くために、たわみを次のように仮定する。
$$\gamma = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (2)$$
 ここに、 r ：回転半径、

$X_n(x)$ ：境界条件を満足する座標関数、 $T_n(t)$ ：未知の時間関数

式(2)の $X_n(x)$ としてはりの線形振動の規準関数を用いて、式(1)にガラーキン法を適用すれば次式がえられる。

$$\ddot{T}_n + 2R_n \dot{T}_n + \Omega_n^2 T_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nmk}^* T_m T_k T_n = \delta_n \bar{p} \cos \omega t \quad (3)$$

ここに、 $\Omega_n = (\lambda_n / \lambda_1)^{1/2}$ 、 $R_n = \int_0^l C_n X_n dx / (2K_n \Omega_n)$ 、 $K_n = \int_0^l X_n^2 dx$ 、 $\beta_{n1m}^* = -\frac{1}{2} \left[\int_0^l \frac{\partial X_n}{\partial x} \frac{\partial X_1}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \int_0^l \frac{\partial X_n}{\partial x} X_n dx / (\lambda^* K_n) \right]$ 、
 $\delta_n = E_n / (\lambda^* K_n)$ 、 $E_n = \int_0^l X_n^2 dx$ 、 $\tau = \omega t$ 、 $\bar{\omega} = \omega / \omega_1$ 、 $\bar{p} = Pl^3 / EI r$ 、 $\lambda_n = l^3 / PA \omega^2 EI$

いま、実験に用いている両端固定はりを対象に、実験で観測された現象を説明するに必要な系の自由度を3と仮定すれば、式(3)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_1 + 2R_1 \dot{T}_1 + T_1 + \beta_{11}^* T_1^3 + (\beta_{13}^* + \beta_{31}^* + \beta_{33}^*) T_1 T_3 + (\beta_{15}^* + \beta_{51}^* + \beta_{55}^*) T_1 T_5 + \beta_{17}^* T_1^7 + \beta_{13}^* T_1 T_3^2 + \beta_{33}^* T_1 T_3^2 = \delta_1 \bar{p} \cos \omega t \quad (4)$$

$$\ddot{T}_3 + 2R_3 \dot{T}_3 + \Omega_3^2 T_3 + \{ \beta_{31}^* T_1^3 + (\beta_{33}^* + \beta_{13}^*) T_1 T_3 + \beta_{35}^* T_1^5 \} T_3 = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{T}_5 + 2R_5 \dot{T}_5 + \Omega_5^2 T_5 + \beta_{51}^* T_1^3 + (\beta_{53}^* + \beta_{35}^* + \beta_{55}^*) T_1 T_3 + (\beta_{57}^* + \beta_{75}^* + \beta_{77}^*) T_1 T_5 + \beta_{59}^* T_1^5 + \beta_{53}^* T_1 T_3^2 + \beta_{33}^* T_1 T_3^2 = \delta_5 \bar{p} \cos \omega t \quad (6)$$

外力がはりの中央に対して対称ならば変形も対称であるから、2次逆対称振動の時間関数 T_2 は通常ゼロとなる。

1次対称振動の時間関数 T_1 および3次対称振動の時間関数 T_3 のみが常に生ずる応答である。したがって、式(4)および(6)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_1 + 2R_1 \dot{T}_1 + T_1 + \beta_{11}^* T_1^3 + (\beta_{13}^* + \beta_{31}^* + \beta_{33}^*) T_1 T_3 + (\beta_{15}^* + \beta_{51}^* + \beta_{55}^*) T_1 T_5 + \beta_{17}^* T_1^7 = \delta_1 \bar{p} \cos \omega t \quad (7)$$

$$\ddot{T}_3 + 2R_3 \dot{T}_3 + \Omega_3^2 T_3 + \beta_{31}^* T_1^3 + (\beta_{33}^* + \beta_{13}^* + \beta_{35}^*) T_1 T_3 + (\beta_{37}^* + \beta_{73}^* + \beta_{77}^*) T_1 T_5 + \beta_{39}^* T_1^5 = \delta_3 \bar{p} \cos \omega t$$

上式の定常解 T_1 および T_3 を次のように仮定する。

$$T_n = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^* \cos m \bar{\omega} \tau + b_m^* \sin m \bar{\omega} \tau) \quad (8)$$

式(8)を式(7)に代入して調和バランス法を適用すれば、未定数 a_m^* 、 b_m^* を決めるための連立非線形代数方程式がえられ、一様分布荷重を受けるはりの定常応答が求まったことになる。

式(8)を式(5)に代入すれば、次のような係数励振型の微分方程式(Hillの方程式)がえられる。

$$\ddot{T}_3 + 2R_3 \dot{T}_3 + \{ \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_{3m} \cos m \bar{\omega} \tau + \beta_{3m}^* \sin m \bar{\omega} \tau) \} T_3 = 0 \quad (9)$$

ここに、 β_0 、 β_{3m} 、 β_{3m}^* ：振幅成分および β_{31m}^* より定まる定数

$T_5 = e^{i\theta_0 \bar{\omega} \tau} \bar{T}_5$ のように標準形に変換のうえ、本題の解を次のように仮定する。

$$\bar{T}_5 = e^{i\tau} \left\{ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m \bar{\omega} \tau + b_m \sin m \bar{\omega} \tau) \right\} \quad (10)$$

ここに、 a_m 、 b_m ：未定定数

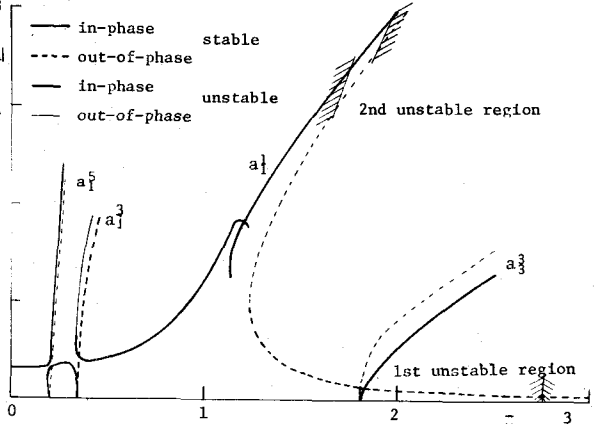
上式を式(9)に代入して再び調和バランス法を適用すれば、未定定数 a_0, a_1, b_0 を求めるための同次方程式がえられる。 $G X = 0$ (10) ここに、 G :係数行列、 X : a_0, a_1, b_0 からなる列ベクトル

上式の X がゼロベクトル以外の解を持つためには、係数行列 G の値がゼロでなければならないことから、固有値問題として未定定数が求められる。固有値入の実数部から減衰定数 γ を引いた値がすべてゼロもしくは負ならば、一般解 $e^{(\lambda - \gamma)t}$ が時間とともに収束するために安定で、逆対称振動 T_2 は励振されない。これに対して一つも正ならば $e^{(\lambda - \gamma)t}$ が発散するために T_2 が励振されることになる。

なお、定常振動 T_1 および T_2 の振幅の安定性を確かめるためには定常解 T_n に微小かく $\delta_n(t)$ を与えることによって生ずる動的応答の安定性を検討すればよい。本題の変分方程式は次の連立の Hill の方程式で与えられる。

$$\ddot{\delta}_1 + 2\alpha_1 \dot{\delta}_1 + \alpha_1^2 \delta_1 + \{3\alpha_1^2 T_1^2 + 2(\beta_{11}^i + \beta_{11}^o + \beta_{11}^s) T_1 T_2 + (\beta_{12}^i + \beta_{12}^o + \beta_{12}^s) T_2^2\} \delta_1 + \{3\alpha_2^2 T_2^2 + 2(\beta_{22}^i + \beta_{22}^o + \beta_{22}^s) T_1 T_2 + (\beta_{21}^i + \beta_{21}^o + \beta_{21}^s) T_1^2\} \delta_2 = 0 \quad (11)$$

3. 数値結果 非減衰系の荷重強度 $\bar{p}=256$ に対する定常振動の応答曲線を求めれば図-1 に示すとおりである。図において横軸は外力の振動数を線形1次6振動数で無次元化した振動数 $\bar{\omega}$ で、縦軸ははりの中央の振幅を回転半径で無次元化した振幅比 A の絶対値である。図中の太い実線は外力と同位相の安定な振幅を、太い破線は外力と逆位相の安定な振幅を示し、また、細い実線と破線は対応する不安定な振幅を示すものである。 $\bar{\omega}=1.0$ 付近で外ずる共振は1次対称振動の主共振を示す。 $\bar{\omega}=1.12$ 付近で外力と同位相の振幅が不連続となるのは3次振動の5倍の高調波成分 $\bar{\omega}$ と主共振の基本波の成分 $\bar{\omega}$ が非線形連成振動を示すためである。主共振の振幅比の大きい領域で斜線部に囲まれた領域は2次逆対称振動が不安定となる領域である。すなわち、この領域で対称振動が係数励振の成分となって2次振動が生ずる領域で、この不安定領域はかなり広いことがわかる。 $\bar{\omega}=2.75$ 付近の不安定領域は2次振動の第1不安定領域である。この不安定領域はかなり狭い。第1および第2不安定領域の存在する周波数領域を示せば表-1 および表-2 に示すとおりである。この他に2次振動の第3不安定領域や下側の第2不安定領域が存在するはずであるが、本法は与えられた振幅ごとに安定性を判別するために未だ探し出していない。計算結果と実験結果を比較すると実験の方が不安定領域がかなり広い結果となっている。この原因は実験に用いたはりに不完全性が存在することによるものと考えられる。なお図-1 の細い実線および破線は対称振動の振幅が存在しえない不安定領域である。 $\bar{\omega}=0.3$ 付近の1次振動の3倍の高調波共振の不安定領域を示せば図-2 に示すとおりである。未確認の不安定領域や減衰のある場合については講演時に発表の予定である。



Amplitude-frequency relation and unstable regions of the clamped beam

図-1

表-1
1st unstable region of the 2nd anti-symmetric response

$\bar{p}$	out-of-phase
128	2.7566
256	2.7567-2.7568
384	2.7569-2.7575

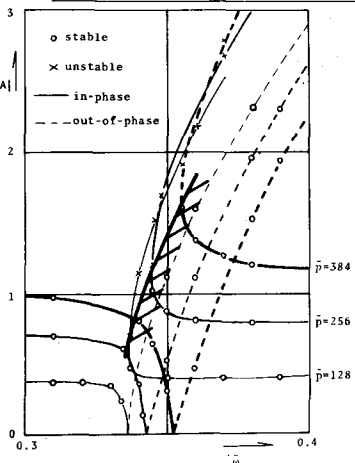
表-2
2nd unstable region of the 2nd anti-symmetric mode

$\bar{p}$	in-phase	out-of-phase
128	1.71-1.94	1.69-1.89
256	1.73-1.96	1.67-1.87
384	1.74-1.99	1.66-1.84

すなわち、この領域で対称振動が係数励振の成分となって2次振動が生ずる領域で、この不安定領域はかなり広いことがわかる。 $\bar{\omega}=2.75$ 付近の不安定領域は2次振動の第1不安定領域である。この不安定領域はかなり狭い。第1および第2不安定領域の存在する周波数領域を示せば表-1 および表-2 に示すとおりである。この他に2次振動の第3不安定領域や下側の第2不安定領域が存在するはずであるが、本法は与えられた振幅ごとに安定性を判別するために未だ探し出していない。計算結果と実験結果を比較すると実験の方が不安定領域がかなり広い結果となっている。この原因は実験に用いたはりに不完全性が存在することによるものと考えられる。なお図-1 の細い実線および破線は対称振動の振幅が存在しえない不安定領域である。 $\bar{\omega}=0.3$ 付近の1次振動の3倍の高調波共振の不安定領域を示せば図-2 に示すとおりである。未確認の不安定領域や減衰のある場合については講演時に発表の予定である。

参考文献 リ高橋, 柿山, 竹内: 長崎大学研究報告第11号, 1978, PP.73~80

2) K. Takarashi and K. Kawahara: Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 26, 1978, PP.339~350



3rd order ultraharmonic responses of clamped beam

図-2