

1. はじめに 幾何学的特性ならぬに材料特性を考慮した構造物系の解析においては、従来、解析モデルとして、確率係数を有する方程式が適用されている。本研究は、係数が確率変数で表される力学系が、不規則外力を受けた場合のr.m.s.応答の平均値を推定する解析手法について検討したものである。すなわち、伊藤形の確率微分方程式を基礎にし、従来から知られている摂動法と階層法(Hierarchy method)を拡張した。狭帯域不規則外力を受ける減衰の小さい系では、固有振動数がわずかに変化するだけで、応答は著しく低下することが予想される。このような系の解析に、これらの手法を適用して、有効性と限界について検討した。解析は、定常r.m.s.応答ならぬに非定常r.m.s.応答について行い、シミュレーションにより妥当性の検証を行った。

2. 確率微分方程式 通常の構造物系が不規則外力を受ける場合、この不規則外力は、白色雑音過程を入力とするフィルターの応答で表現できるものとする。ここで、構造物系およびフィルター系を状態空間でベクトル表現すると、構造物-フィルター系は、次の伊藤形の確率微分方程式で記述できる。

$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)W(t)$ (1) ここで、 $W(t)$ は、白色雑音過程ベクトルである。本研究は、 $A(t)$ 、 $B(t)$ の要素が確率変数である場合を対象としたものである。この確率変数 $a_1, \dots, a_n$ は、初期条件および外力と独立なGauss確率変数と仮定する。

3. 摂動法(Perturbation method) パラメータ a_i を $a_i = \bar{a}_i + \varepsilon_i$ とし、平均値と微小変動の和と考える。ここで、 $X(t)$ 、 $A(t)$ 、 $B(t)$ を微小変動で展開する。 $X(t) = X_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_{1i}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j X_{2ij}(t) + \dots$ (2)

$$A(t) = A_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i A_{1i}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j A_{2ij}(t) + \dots$$
 (3)

$$B(t) = B_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i B_{1i}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j B_{2ij}(t) + \dots$$
 (4)

微小変動を1次まで考慮すると、 $X(t)$ の共分散は、次式で与えられる。

$$E[X(t)X(t)^T] = E[X_0(t)X_0(t)^T] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j E[X_{1i}(t)X_{1j}(t)^T] \quad (5)$$

応答解析は $E[X_{1i}(t)X_{1j}(t)^T]$ の解析に帰着する。ここで、共分散 $E[X_{1i}(t)X_{1j}(t)^T]$ を $R_{1ij}(t)$ で表すものとする。(1)(3)(4)より、平均値の方程式ならぬに、それぞれ微小変動 ε_i に対応する確率微分方程式が得られ、これより次の共分散方程式が誘導される。

$$\dot{R}_{00}(t) = A_0(t)R_{00}(t) + R_{00}(t)A_0(t)^T + B_0(t) \otimes B_0(t)^T$$

$$\dot{R}_{0i}(t) = A_0(t)R_{0i}(t) + R_{0i}(t)A_0(t)^T + A_{1i}(t)R_{00}(t) + B_0(t) \otimes B_{1i}(t)^T$$

$$\dot{R}_{1ij}(t) = A_0(t)R_{1ij}(t) + R_{1ij}(t)A_0(t)^T + A_{1i}(t)R_{0j}(t) + R_{0i}(t)A_{1j}(t)^T + B_0(t) \otimes B_{2ij}(t)^T$$

$$\dot{R}_{ij}(t) = A_0(t)R_{ij}(t) + R_{ij}(t)A_0(t)^T + A_{1j}(t)R_{0i}(t) + R_{0j}(t)A_{1i}(t)^T + B_0(t) \otimes B_{1j}(t)^T$$

非定常応答解析では、これらの微分方程式を解くことにより、分散の応答が得られる。定常応答解析では、(6)式は、連立方程式となる。ところで、摂動法による解析では、例えば、確率変数間に相関がない場合

$$E[z_1(t)^2] = E[z_0(t)^2] + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 E[z_{1i}(t)^2] \quad (7)$$

となり、その解は $E[z_1(t)^2] \geq E[z_0(t)^2]$ となる。

すなわち、摂動法による解は、必ず平均値応答より大となり、逆の傾向を示す解析には適用できないことを示唆している。

4. 階層法(Hierarchy method)

(1)式より誘導される共分散方程式を

$$\dot{R}_X(t) = A(t)R_X(t) + R_X(t)A_X(t)^T + B(t) \otimes B(t)^T \quad (8)$$

とする。これは未知数がマトリックス形式の方程式

であるから、改めて未知数を適当なベクトルに展開することにより、通常の1階の連立微分方程式に表すことができる。 $R_X(t)$ をベクトルで表したものを $Y(t)$ とする。展開した形を $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + Q(t)$ (9)

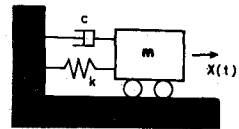


図-1 1自由度系

で表す。ここで、 $\Lambda(t)$ と $Q(t)$ は、次のように表されるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(t) &= \Lambda_0(t) + \sum_{i=1}^n a_i \Lambda_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \Lambda_{ij}(t) \\ Q(t) &= Q_0(t) + \sum_{i=1}^n a_i Q_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Q_{ij}(t) \end{aligned} \right\} (10)$$

(9)(10)式より、確率変数を含む方程式が得られるが、 a_i と $X(t)$ は相関を有する。そこで、(9)(10)式において、各パラメータに対する平均を取ると、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \dot{X}(t) \rangle &= \Lambda_0(t) \langle X(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \Lambda_i(t) \langle a_i X(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}(t) \langle a_i a_j X(t) \rangle \\ &+ Q_0(t) + \sum_{i=1}^n \langle a_i \rangle Q_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i a_j \rangle Q_{ij}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

すると、改め $\langle a_i X(t) \rangle$ 、 $\langle a_i a_j X(t) \rangle$ の未知の変数が表れる。次に、(9)式に a_R を掛けて両辺の平均をとると、次の2層目の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle a_R \dot{X}(t) \rangle &= \Lambda_0(t) \langle a_R X(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \Lambda_i(t) \langle a_R a_i X(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}(t) \langle a_R a_i a_j X(t) \rangle \\ &+ Q_0(t) \langle a_R \rangle + \sum_{i=1}^n \langle a_R a_i \rangle Q_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_R a_i a_j \rangle Q_{ij}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

この操作が無限に続くが、適当な近似を用いて、この連鎖を打ち切る。本研究では、2層目までを考慮し、キュムラント展開を用いたものである。

5. 数値計算と考察

具体的な数値計算としては、次の形の1自由度系のR.M.S.応答について考える。 $S_2(\omega) = S_0 / ((\omega_0^2 - \omega)^2 + 2\eta_0^2 \omega_0^2 \omega^2)$ (13)
1自由度系の諸元としては、質量 $m = 1$ (kg)、バネ定数 $k = (2\pi)^2 \times 10^6$ N/cm、減衰係数 $C = 4 \times (2\pi)^2 \times 10^2$ sec/cm とする。ここでは、 m と k を確率変数とみなし、標準偏差は、変動係数 0~0.3 の範囲で考えた。解析における基本的な仮定としては、 m と k を正規確率変数としたこととあり、キュムラント展開において $1/m$ も正規確率変数と考えられている。また、解析では、次の値を用いる。

$\langle \frac{1}{m} \rangle$	$(1 + 2\eta_m^2 + 3\eta_m^4) / \mu_m$
$\langle (\frac{1}{m} - \langle \frac{1}{m} \rangle)^2 \rangle$	$\eta_m^2 (1 + 8\eta_m^2) / \mu_m^2$
$\langle (\frac{1}{m} - \langle \frac{1}{m} \rangle)(k - \langle k \rangle) \rangle$	$-\eta_m \eta_k \eta_{mk} (1 + 3\eta_m^2)$
$\langle \frac{1}{m^2} \rangle$	$(1 + 3\eta_m^2 + 15\eta_m^4) / \mu_m^2$
$\langle \frac{1}{m^3} \rangle$	$(1 + 6\eta_m^2 + 45\eta_m^4) / \mu_m^3$
$\langle \frac{k}{m^2} \rangle$	$\mu_k \langle \frac{1}{m^2} \rangle - \eta_m \eta_k \eta_{mk} (1 + 6\eta_m^2) / \mu_m^2$

$$\mu_m = \langle m \rangle, \mu_k = \langle k \rangle, \eta_m^2 = \langle (m - \mu_m)^2 \rangle, \eta_k^2 = \langle (k - \mu_k)^2 \rangle$$

$$\eta_{mk} = \langle (m - \mu_m)(k - \mu_k) \rangle, \eta_{mk} = \eta_{mk} / \eta_m \eta_k$$

$$\eta_m = \eta_m / \mu_m, \eta_k = \eta_k / \mu_k$$

向が表れている。

図-3は、変動係数0のときの値に対する、変動係数の値を変化させた応答の割合を示した。 $W_0/W = 1$ の時、 m 、 k の変動係数を大きくすると、 W は W_0 の回りどばらつき、平均応答は小さくなる。図-4は、変動係数が小さい場合、摂動法と階層法の比較を行ったものである。また、図-5では、 $W_0/W = 0.7$ と $W_0/W = 1.0$ において、変動係数を変化させた場合、面解法による結果を示した。変動係数の増加に伴って応答が減少する場合、摂動法は逆の傾向を示している。一方、増加する場合は、変動係数が小さいところでは、両者は接近するが、変動係数の増加に伴って、摂動法の結果は現実的でない結果を与える。 参考文献 省略

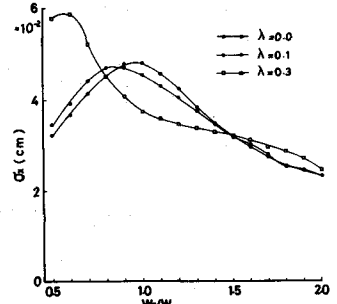


図-2 固有振動数比 W_0/W に対する応答

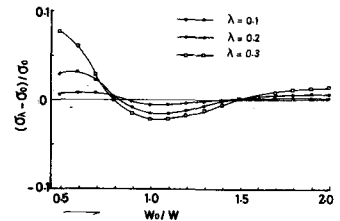


図-3 階層法による解

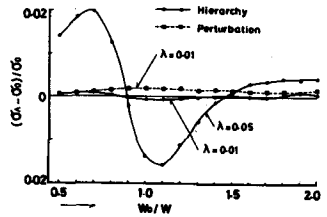


図-4 階層法と摂動法

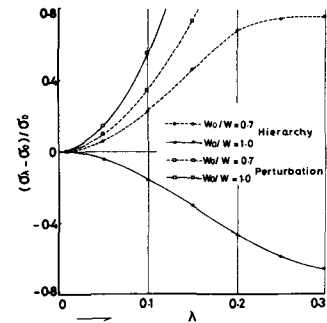


図-5 変動係数に対する両解法の解