I－16　単一走行車両の確率特性を考慮した道路橋のr.m.s.応答解析

長崎大学工学部　正　員　岡林　隆敏

学生員　○久松　好己

1．はじめに　不規則路面凹凸を考慮した、単一走行車両による橋梁の応答解析については、最近いくつかの研究が発表されている。これらの解析では、特定の車両を解析の対象としているが、実際、橋梁に作用する車両は、単一車両の場合でも、種々の形式の車両が走行するので、車両の諸特性は確率的に考えなければならない。この点を考慮して、これまで各種の車両に対する橋梁の応答より、平均応答を求める取扱いがなされている。本報告は、車両の質量W，ばね定数kが確率変数である場合、橋梁の平均応答を得る解析手法について述べたものである。解析は、摂動法(Perturbation)と階層法(Hierarchy)を基礎とするものであるが、これらの手法の拡張については、著者の一人が報告する。本報告では、具体的な橋梁車両系に、上記の手法を適用した場合、これらの手法の実用性と、その限界について検討するものである。

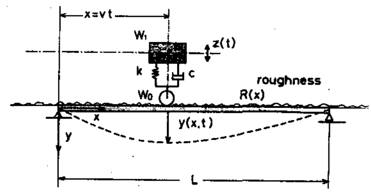
2．橋梁－車両系の運動方程式と路面凹凸　1自由度系でモデル化された車両が、一定速度Vで走行する際の橋梁と車両の運動方程式は次のようになる。車両直下の橋梁の変位をy_v，さらに、不規則路面凹凸を$r(t)$とすると、車両の方程式は、　$W\ddot{z}+c(\dot{z}-\dot{y}_v-\dot{r})+k(z-y_v-r)=0$　(1)　ここに、W，c，kは、車両の質量、減衰係数、ばね定数である。橋梁のn次の基準関数を$\phi_n(x)$，基準座標を$q_n(t)$とすると、そのたわみと速度は、　$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)q_n(t)$　(2)

$\dot{y}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\dot{q}_n(t)$　(3)　$\ddot{q}_n(t)+2\rho_n\omega_n\dot{q}_n(t)+\omega_n^2 q_n(t)=\phi_n(vt)P(t)/M_n^*$　(4)

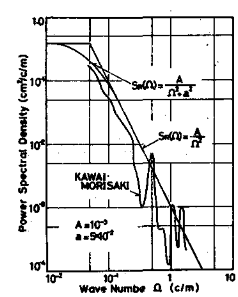
ただし、ρ_n，ω_nは、n次の減衰定数、固有振動数であり、P(t)は車両の全接地力、またM_n^*はn次の換算質量で、次式で表わされる。　$M_n^*=\int_0^l\phi_n(x)^2dx$　(5)

図2に路面凹凸のパワースペクトルを示したが、本解法では、路面凹凸のパワースペクトル密度を次式でモデル化する。　$S_R(\omega)=S_0/(\omega^2+\beta^2)$，$S_0=VA(2\pi)^2$，$\beta=2\pi\alpha$，$\alpha=0.05$　(6)　これは、次式で表わされる路面系の定常解過程のパワースペクトル密度である。　$\dot{r}(t)+\beta r(t)=w(t)$　(7)　$w(t)$は分散が$S_0/2\pi$の白色雑音過程である。橋梁－車両－路面系を、状態空間$\mathbb{X}(t)=\{q_1,\dot{q}_1,z,\dot{z},r\}^T$　(8)　で定義すると、系の運動方程式は、次式の伊藤形の確率微分方程式で表現できる。　$\dot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}(t)\mathbb{X}(t)+\mathbb{B}(t)\mathbb{W}(t)$　(9)

ここに、$\mathbb{W}(t)$は白色雑音過程ベクトルである。



図－1　橋梁－車両系



図－2　路面凹凸

表－1　車両諸元

車両総重量平均値		1.36×10^4 Kg
変動係数	0.1	1.36×10^3 Kg
	0.2	2.72×10^3 Kg
	0.3	4.08×10^3 Kg
車両ばね定数平均		6.577×10^6 Kg/cm
変動係数	0.1	6.577×10^5 Kg/cm
	0.2	1.315×10^6 Kg/cm
	0.3	1.973×10^6 Kg/cm
減衰係数		1.794×10^4 Kg/cm/sec

3．車両の諸特性が確率量である場合の解析　本研究では、車両の諸特性，W，c，kの中で，W，kを確率量であるとする。以下の解析において、いくつかの仮定をするが、まずW，kは平均値$\overline{W}$，$\bar{k}$，標準偏差σ_W，σ_kを有する正規確率変数とする。

(i)　摂動法による解析(Perturbation Method)　W，kにおいて、平均値回りの微小変動をε_W，ε_kとすると，1次までの摂動を考えた場合、

$$\frac{1}{W}=\frac{1}{\overline{W}}\left(1-\frac{\varepsilon_W}{\overline{W}}\right)\qquad\frac{k}{W}=\frac{\bar{k}}{\overline{W}}\left(1+\frac{\varepsilon_k}{\bar{k}}-\frac{\varepsilon_W}{\overline{W}}\right)\qquad(10)$$

となる。このとき，(9)式の$\mathbb{X}(t)$，$\mathbb{A}(t)$，$\mathbb{B}(t)$は、次のように展開できる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{X}(t) &= \mathbb{X}_0(t) + \varepsilon_w \mathbb{X}_1(t) + \varepsilon_k \mathbb{X}_2(t) + \cdots \\ \mathbb{A}(t) &= \mathbb{A}_0(t) + \varepsilon_w \mathbb{A}_1(t) + \varepsilon_k \mathbb{A}_2(t) + \cdots \\ \mathbb{B}(t) &= \mathbb{B}_0(t) + \varepsilon_w \mathbb{B}_1(t) + \varepsilon_k \mathbb{B}_2(t) + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

表-2　道路橋の諸元表

スパン長 L(m)	総重量 W(×10⁴Kg)	曲げ剛性 EI (×10¹²Kg.cm²)	固有振動数 f_1(Hz)	スパン長 L(m)	総重量 W(×10⁴Kg)	曲げ剛性 EI (×10¹²Kg.cm²)	固有振動数 f_1(Hz)
20	4.84	6.21	6.23	70	19.44	80.15	1.70
30	7.76	12.42	3.79	80	23.36	130.31	1.66
40	10.68	24.41	2.94	90	25.28	171.26	1.50
50	13.60	42.20	2.45	100	28.20	218.01	1.37
60	15.52	65.78	2.11				

ここで、応答 $\mathbb{X}(t)$ の共分散は、次式となり、 $E[\mathbb{X}(t)\mathbb{X}(t)^T] = E[\mathbb{X}_0(t)\mathbb{X}_0(t)^T] + \sigma_w^2 E[\mathbb{X}_1(t)\mathbb{X}_1(t)^T] + \sigma_k^2 E[\mathbb{X}_2(t)\mathbb{X}_2(t)^T] + \sigma_{wk}(E[\mathbb{X}_1(t)\mathbb{X}_2(t)^T] + E[\mathbb{X}_2(t)\mathbb{X}_1(t)^T])$ -----(12)　$E[\mathbb{X}_0(t)\mathbb{X}_0(t)^T]$, $E[\mathbb{X}_1(t)\mathbb{X}_1(t)^T]$, $E[\mathbb{X}_2(t)\mathbb{X}_2(t)^T]$, $E[\mathbb{X}_1(t)\mathbb{X}_2(t)^T]$ の解析に帰着する。

(ii) 階層法による解析（Hierarchy method）　摂動法ならびに階層法については、著者の一人が報告するので、これらの手法を、橋梁の応答解析に適用した結果を記すことにする。(9)式の確率微分方程式から得られる共分散方程式は、次式で与えられる。

$$\dot{\mathbb{R}}_x(t) = \mathbb{A}(t)\mathbb{R}_x(t) + \mathbb{R}_x(t)\mathbb{A}(t)^T + \mathbb{Q}(t) \quad (13)$$

ここで、$\mathbb{R}_x(t)$ は確率変数であるから、$\langle \mathbb{R}_x(t)\rangle$, $\langle k\mathbb{R}_x(t)\rangle$, $\langle \mathbb{R}_x(t)/w\rangle$, $\langle \mathbb{Q}(t)\rangle$, $\langle k\mathbb{Q}(t)\rangle$, $\langle \mathbb{Q}(t)/w\rangle$ の量を考え、これらを改めて、$\mathbb{X}_1(t)$, $\mathbb{X}_2(t)$, $\mathbb{X}_3(t)$, $\mathbb{F}_1(t)$, $\mathbb{F}_2(t)$, $\mathbb{F}_3(t)$ でベクトル表示する。また、係数行列を次のように表す。　$\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}_0(t) + \frac{1}{W}\mathbb{A}_1(t) + k\mathbb{A}_2(t) + \frac{k}{W}\mathbb{A}_3(t)$　(14)

$$\mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}_0(t) + \frac{1}{W}\mathbb{Q}_1(t) + k\mathbb{Q}_2(t) + \frac{1}{W^2}\mathbb{Q}_3(t) \quad (15)$$

このとき階層方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbb{X}_1(t)\\ \mathbb{X}_2(t)\\ \mathbb{X}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13}\\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23}\\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32} & \mathbb{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{X}_1(t)\\ \mathbb{X}_2(t)\\ \mathbb{X}_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbb{F}_1(t)\\ \mathbb{F}_2(t)\\ \mathbb{F}_3(t)\end{bmatrix} \quad (16)$$

$\mathbb{A}_{11} = \mathbb{A}_0(t) + (\sigma_{12}^2 - \mu_1\mu_2)\mathbb{A}_3(t)$　　$\mathbb{A}_{12} = \mathbb{A}_1(t) + \mu_2\mathbb{A}_2(t)$

$\mathbb{A}_{13} = \mathbb{A}_2(t) + \mu_1\mathbb{A}_3(t)$　　$\mathbb{A}_{21} = (\sigma_1^2 - \mu_1^2)\mathbb{A}_1(t) + (\sigma_{12}^2 - \mu_1\mu_2)\mathbb{A}_2(t) + (\sigma_1^2\mu_2 + 2\sigma_{12}^2\mu_1 - 2\mu_1^2\mu_2)\mathbb{A}_3(t)$　　$\mathbb{A}_{22} = \mathbb{A}_0(t) + 2\dot{\mu}_1\mathbb{A}_1(t) + \mu_2\mathbb{A}_2(t) + 2\mu_1\mu_2\mathbb{A}_3(t)$　　$\mathbb{A}_{23} = \mu_1\mathbb{A}_2(t) + \mu_1^2\mathbb{A}_3(t)$　　$\mathbb{A}_{31} = (\sigma_{12}^2 - \mu_1\mu_2)\mathbb{A}_1(t) + (\sigma_2^2 - \mu_2^2)\mathbb{A}_2(t) + (2\sigma_{12}^2\mu_2 + \sigma_2^2\mu_1 - 2\mu_1\mu_2^2)\mathbb{A}_3(t)$　　$\mathbb{A}_{32} = \mu_2\mathbb{A}_1(t) + \mu_2^2\mathbb{A}_3(t)$　　$\mathbb{A}_{33} = \mathbb{A}_0(t) + \mu_1\mathbb{A}_1(t) + 2\mu_2\mathbb{A}_2(t) + 2\mu_1\mu_2\mathbb{A}_3(t)$

$\mathbb{F}_1(t) = \mathbb{Q}_0(t) + m_{10}\mathbb{Q}_1(t) + m_{01}\mathbb{Q}_2(t) + m_{20}\mathbb{Q}_3(t)$

$\mathbb{F}_2(t) = m_{10}\mathbb{Q}_0(t) + m_{20}\mathbb{Q}_1(t) + m_{11}\mathbb{Q}_2(t) + m_{30}\mathbb{Q}_3(t)$

$\mathbb{F}_3(t) = m_{01}\mathbb{Q}_0(t) + m_{11}\mathbb{Q}_1(t) + m_{02}\mathbb{Q}_2(t) + m_{31}\mathbb{Q}_3(t)$

ここに、μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, σ_{12}, m_{10}, m_{01}, m_{20}, m_{02}, m_{11}, m_{30}, m_{31} は、それぞれ $1/W$, k に関する統計量である。

4．数値計算　数値計算は、表-2の各橋梁を対象とする。車両の諸元は表-1に示した。ここに示した図は、車両の接地力が橋梁中点に作用すると考えた定常応答解析の結果である。図-2は、車両のWおよびkを変化させた場合の変位応答である。図-3は、摂動法と階層法による解析の比較を示した。図-4，図-5は、Wとkの変動係数が0と0.3のとき、橋梁のスパン中点におけるたわみ応答と速度応答を示したものである。詳細な結果および非定常応答解析は講演当日発表する予定である。

5．参考文献　省略

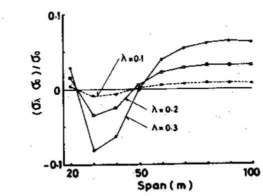


図-3
変動係数に対する変位応答の変化

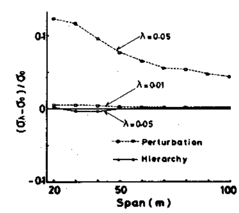


図-4
摂動法と階層法の比較

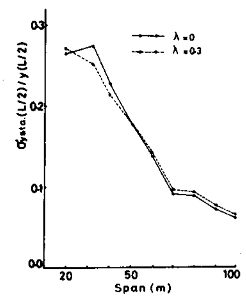


図-5 r.m.s.変位応答

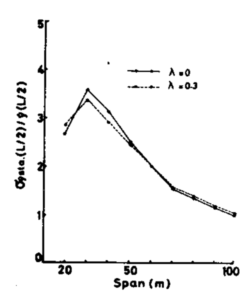


図-6 r.m.s.速度応答