I－15　陰的逐次積分法の安定性と位相遅れに関する一考察

熊本大学　正会員　平井一男
八代高専　正会員　○水田洋司

1. まえがき

逐次積分法の安定問題を数学的に扱っている論文は多くあり、N. M. Newmark[1]は差分方程式を用いて1自由度系の自由振動について論じている。本論文では、Wilsonのθ法[2]、Newmarkのβ法（$\beta=1/4$）等の陰的逐次積分法の安定問題が物理的にどのようなことに起因するかを検討している。これらの逐次積分法は、時間間隔内での加速度変化に仮定を設けているために実際の外力と異なった外力が作用している系を解いていることに等しい。筆者らは、応答の安定性、位相遅れは、加速度仮定による作用外力と実際の外力との差で表わされる誤差外力、この誤差外力が仕事をするために生ずる誤差エネルギーに関係すると考えている。まず、誤差外力、誤差エネルギーを定義し、Wilsonのθ法、Newmarkのβ法（$\beta=1/4$）に含まれる誤差外力、誤差エネルギー算定の式を提案する。次に、1質点系を例にとり、変位応答と誤差エネルギーの関係を明らかにしている。

2. 誤差外力と誤差エネルギー

多自由度系のn時間点での非減衰運動方程式は

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{W}}_n+\mathbb{K}\mathbb{W}_n=\mathbb{F}_n \tag{1}$$

と与えられる。ここに、$\mathbb{M}$は質量マトリックス、$\mathbb{K}$は剛性マトリックス、$\ddot{\mathbb{W}}_n$, $\mathbb{W}_n$, $\mathbb{F}_n$は、それぞれn時間点での加速度ベクトル、変位ベクトル、外力ベクトルである。

(1) 誤差外力

逐次積分法は加速度にある仮定を設けているため、時間間隔内では運動方程式(1)式を満足していない。時間間隔内でも(1)式が成立するとして解いているということは、時間間隔内の任意時間τにおいて

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{W}}_{n\tau}+\mathbb{K}\mathbb{W}_{n\tau}=\mathbb{F}_{n\tau}+\mathbb{F}_{e\tau} \tag{2}$$

という関係を満足する外力$\mathbb{F}_{e\tau}$が作用している系を解いていることに等しい。$\mathbb{F}_{e\tau}$は加速度仮定による増加外力で、τ時間における誤差外力と定義する。式で表わせば

$$\mathbb{F}_{e\tau}=\mathbb{M}\ddot{\mathbb{W}}_{n\tau}+\mathbb{K}\mathbb{W}_{n\tau}-\mathbb{F}_{n\tau} \tag{3}$$

となる。時間間隔内の全誤差外力（nステップにおける誤差外力）は、時間間隔をhとすると

$$\mathbb{F}_e=\int_0^h(\mathbb{M}\ddot{\mathbb{W}}_{n\tau}+\mathbb{K}\mathbb{W}_{n\tau}-\mathbb{F}_{n\tau})d\tau \tag{4}$$

(2) 誤差エネルギー

(3)式で表わされる誤差外力が任意時間τ_1からτ_2の間になす仕事量は、$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathbb{F}_{e\tau}\dot{\mathbb{W}}_{n\tau}^T d\tau$と表わすことができ、時間間隔内で生じる誤差エネルギーE_e（スカラー量）は次式で求められる。

$$E_e=\int_0^h\mathbb{F}_{e\tau}\dot{\mathbb{W}}_{n\tau}^T d\tau=\int_0^h(\mathbb{M}\ddot{\mathbb{W}}_{n\tau}+\mathbb{K}\mathbb{W}_{n\tau}-\mathbb{F}_{n\tau})\dot{\mathbb{W}}_{n\tau}^T d\tau \tag{5}$$

(5)式は1ステップにおける誤差エネルギーを表わしており、ステップごとにこのエネルギーが蓄積される。従って、ある時間点までに系に蓄積された誤差エネルギーは各ステップで求められた誤差エネルギーの総計となる。(4), (5)式にみるように、誤差外力、誤差エネルギーはhの関数として表わされる。また、逐次積分法の安定性、位相遅れ等はhの大きさに関係することが知られており、誤差外力、誤差エネルギーという物理量は逐次積分法の安定性問題に関係していると考えられる。

3. 逐次積分法の誤差外力、誤差エネルギー

(1) Wilsonのθ法

Wilsonのθ法は、時間間隔内の加速度変化を線形変化としており、hを$\theta(\geq 1)$倍した時間点での加速度

$\ddot{W}_{n\theta}$を求め、h時間における加速度を求める加速度$\ddot{W}_n$としている。$\ddot{W}_n$は次式のように表わせる。

$$\ddot{W}_n = \left(1-\frac{1}{\theta}\right)\ddot{W}_{n-1} + \frac{1}{\theta}\ddot{W}_{n\theta} \tag{6}$$

また、任意時間τ $(0 \leqq \tau \leqq h)$における加速度、速度、変位は$\ddot{W}_n$を用いて(7),(8),(9)式のように表わせる。

$$\ddot{W}_{n\tau} = \ddot{W}_{n-1} + \frac{\tau}{h}(\ddot{W}_n - \ddot{W}_{n-1}) \tag{7}$$

$$\dot{W}_{n\tau} = \dot{W}_{n-1} + \tau\ddot{W}_{n-1} + \frac{\tau^2}{2h}(\ddot{W}_n - \ddot{W}_{n-1}) \tag{8}$$

$$W_{n\tau} = W_{n-1} + \tau\dot{W}_{n-1} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{W}_{n-1} + \frac{\tau^3}{6h}(\ddot{W}_n - \ddot{W}_{n-1}) \tag{9}$$

(7)～(9)式を用いて誤差外力F_{We}、誤差エネルギーE_{We}算定の式を求めると

$$F_{We} = hA_{W0} + \frac{h^2}{2}A_{W1} + \frac{h^3}{3}A_{W2} + \frac{h^4}{4}A_{W3} \tag{10}$$

$$E_{We} = hC_{W0} + \frac{h^2}{2}C_{W1} + \frac{h^3}{3}C_{W2} + \frac{h^4}{4}C_{W3} + \frac{h^5}{5}C_{W4} + \frac{h^6}{6}C_{W5} \tag{11}$$

ここに、$A_{W0}=M\ddot{W}_{n-1}+KW_{n-1}-F_{n-1}$, $A_{W1}=\frac{1}{h}M(\ddot{W}_n-\ddot{W}_{n-1})+K\dot{W}_{n-1}$, $A_{W2}=\frac{1}{2}K\ddot{W}_{n-1}$, $A_{W3}=\frac{1}{6h}K(\ddot{W}_n-\ddot{W}_{n-1})$, $B_{W0}=\dot{W}_{n-1}$, $B_{W1}=\ddot{W}_{n-1}$, $B_{W2}=\frac{1}{2h}(\ddot{W}_n-\ddot{W}_{n-1})$, $C_{W0}=A_{W0}B_{W0}^T$, $C_{W1}=A_{W0}B_{W1}^T+A_{W1}B_{W0}^T$, $C_{W2}=A_{W0}B_{W2}^T+A_{W1}B_{W1}^T+A_{W2}B_{W0}^T$, $C_{W3}=A_{W1}B_{W2}^T+A_{W2}B_{W1}^T+A_{W3}B_{W0}^T$, $C_{W4}=A_{W2}B_{W2}^T+A_{W3}B_{W1}^T$, $C_{W5}=A_{W3}B_{W2}^T$, B_{W0}^TはB_{W0}の転置ベクトル。

(2) Newmarkのβ法(β=1/4)

Newmarkのβ法(β=1/4)は、時間間隔内の加速度変化を一定と仮定している。任意時間τでの加速度は

$$\ddot{W}_{n\tau} = \frac{1}{2}(\ddot{W}_{n-1} + \ddot{W}_n) \tag{12}$$

と表わせる。これより、τにおける速度、変位は次式のように表わせる。

$$\dot{W}_{n\tau} = \dot{W}_{n-1} + \frac{\tau}{2}(\ddot{W}_{n-1} + \ddot{W}_n) \tag{13}$$

$$W_{n\tau} = W_{n-1} + \tau\dot{W}_{n-1} + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{W}_{n-1} + \ddot{W}_n) \tag{14}$$

(12)～(14)式を用いて誤差外力F_{Ne}、誤差エネルギーE_{Ne}算定の式を求めると

$$F_{Ne} = hA_{N0} + \frac{h^2}{2}A_{N1} + \frac{h^3}{3}A_{N2} \tag{15}$$

$$E_{Ne} = hC_{N0} + \frac{h^2}{2}C_{N1} + \frac{h^3}{3}C_{N2} + \frac{h^4}{4}C_{N3} \tag{16}$$

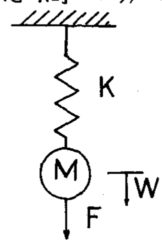

図-1. 1質点バネモデル

となる。ここに、$A_{N0}=\frac{1}{2}M(\ddot{W}_{n-1}+\ddot{W}_n)+KW_{n-1}-F_{n-1}$, $A_{N1}=K\dot{W}_{n-1}$, $A_{N2}=\frac{1}{4}K(\ddot{W}_{n-1}+\ddot{W}_n)$, $B_{N0}=\dot{W}_{n-1}$, $B_{N1}=\frac{1}{2}(\ddot{W}_{n-1}+\ddot{W}_n)$, $C_{N0}=A_{N0}B_{N0}^T$, $C_{N1}=A_{N0}B_{N1}^T+A_{N1}B_{N0}^T$, $C_{N2}=A_{N1}B_{N1}^T+A_{N2}B_{N0}^T$, $C_{N3}=A_{N2}B_{N1}^T$である。

4. 数値計算

図-1に示す1質点バネ系($M=1.0\,kg\cdot sec^2/cm$, $K=1.0\,kg/cm$)を例にとり数値計算を行なった。外力は近似誤差がはいらないように一定外力($F=1.0\,kg$)としている。時間間隔hをかえて、変位応答(図-2)、誤差エネルギー(図-3)を図示している。

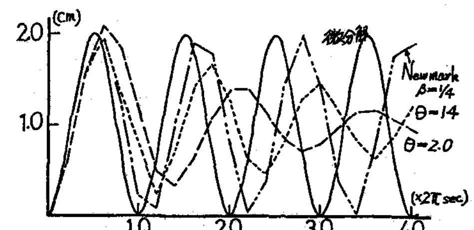

図-2. 変位応答

5. おわりに

Wilsonのθ法(θ≧1.37)は無条件安定、Newmarkのβ法(β=1/4)は振幅誤差が零ということと誤差エネルギーの蓄積とは、よく一致しているようである。Wilsonのθ法は各ステップにおいて負の誤差エネルギーが蓄わえられ、Newmarkのβ法(β=1/4)は誤差エネルギーの蓄積がない。しかし、時間間隔内の任意時間では両手法とも誤差エネルギーはある値をもち、応答の位相遅れとなって表われている。本研究には、文部省科学研究費の補助を受けた。記して謝意を表する。

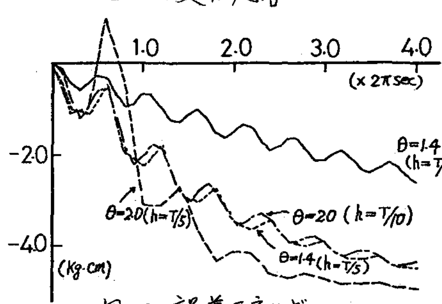

図-3 誤差エネルギー

(参考文献)

(1) N.M. Newmark: A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. of ASCE, Vol.EM3, pp.67～74, 1959.

(2) E.N. Wilson, etal: Nonlinear Dynamics of Complex Structures, Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol.1, pp.241～252, 1973.