

1. はじめに 有限変形における弾性基礎式が、変形後の状態におけるいわゆる Kirchhoff の擬応力を用いて、変形前の座標についての微分方程式として表示できることは、Kappus の証するところであるが、近年たとえば Dym, Shames, Fung, 鷲津らも、その著書においてこの問題の種々の方法による厳密解が紹介されている。ここでは、空間に固定された右手系直交座標系と同じ座標系が、当初弾性体内部に埋め込まれているとき、この埋め込み座標が弾性体の変形にともなって歪曲された曲線座標系を形成することに着目して、曲線座標系におけるテンソル解析の方法を用いて有限変形の弾性基礎式を誘導する。とくに弾性体の変形を図-1に示すように、1. 荷重が作用しない変形前の状態、2. 荷重が作用した変形の中間状態、3. 変形後の段階に分け、変形前のもう一つの変形の中間状態を基準にした場合にも、Kirchhoff の擬応力、および有限変形の弾性基礎式が成立することを示す。この中間状態を基準にした有限変形の弾性基礎式の誘導は、有限変形解析における一種の質量増分法の根拠となるもので、本論の主眼テーマである。このように有限変形の弾性基礎式は、歪曲された曲線座標系で形成する埋め込み座標についての平衡式といえるから、任意曲線座標系における平衡微分方程式が、有限変形の弾性基礎式と同一の形式をとることにについて言及する。また Einstein の総和記法はできるだけ避け、工学的にいわゆるマトリックス記法(線形変換の dyad 記法というのが適切であるという)に就いた解法となる。総和記法によるよりマトリックス記法の方が物理現象の全体像を把握しやすく、工学者にとって理解しやすき表現のようと思われる。

2. 有限変形の幾何学的表現 空間に固定された右手系直交座標において、変形の中間状態の弾性体内部の1点Pの位置ベクトルが $\mathbf{x}' = [x'_1, x'_2, x'_3]^T$ とする。この空間に固定された座標系と同じ座標系が、中間状態における弾性体内部に埋め込まれているとして、弾性体の変形にともなって埋め込み座標も歪曲する。点Pの変形後の位置P'の埋め込み座標は、中間状態における座標と変りながら、基準座標系に対する位置ベクトルは $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ となる。かつ $\mathbf{x}'$ と $\mathbf{x}$ とは1:1の対応があり、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}')$ で、逆に $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x})$ が成立する。これはまた、変形後の任意点P'の埋め込み曲線座標 $\mathbf{x}'$ と

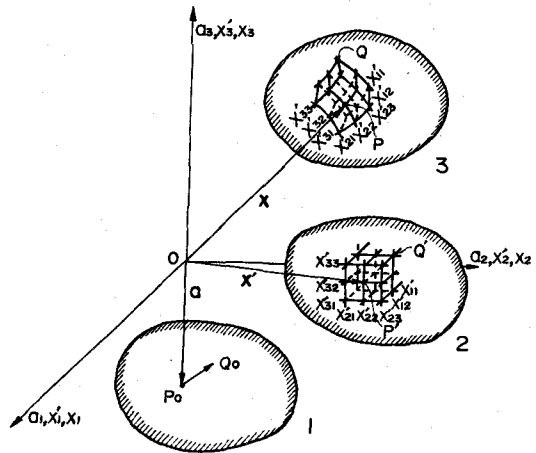


図-1 弾性体の変形前、中間、後における埋め込み座標基準座標系における位置ベクトル $\mathbf{x}$ の関係式ともいえる。点P'に隣接する点Q'の位置ベクトルを $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ とする。 $\delta \mathbf{x}'$ は変形の中間状態における微小線素である。このQ'が変形後に位置ベクトル $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ の点Qに移動するものとすれば、線素 $\overrightarrow{P'Q'} = \delta \mathbf{x}'$ は変形後に $\overrightarrow{PQ} = \delta \mathbf{x}$ となる

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_1} \delta x'_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_2} \delta x'_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_3} \delta x'_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \delta \mathbf{x}' \quad (1)$$

ここに

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \left[\frac{\partial x}{\partial x'_1} \quad \frac{\partial x}{\partial x'_2} \quad \frac{\partial x}{\partial x'_3} \right] = [u_1 \ u_2 \ u_3] \quad (2)$$

である。式(1)の右辺第1項 $\delta \mathbf{x}_1 = (\partial \mathbf{x} / \partial x'_1) \delta x'_1 = u_1 \delta x'_1$ は変形の中間状態における微小直方体の1辺 $[\delta x'_1 \ 0 \ 0]$ の変形後の線素ベクトルで、 $\delta x'_1$ と、同様にして誘導される $\delta x'_2 = u_2 \delta x'_2$ と $\delta x'_3 = u_3 \delta x'_3$ は、図-2に示す

ように、変形後の微小6面体を形成する。その側面積一つ δA_i をベクトルで表示して δA_i^* とし、これが中間状態における面積 δA_{i0} との比を $\delta A_i^* = \delta A_i / \delta A_{i0}$ とすれば

$$A^* = \begin{bmatrix} \delta A_1^* \\ \delta A_2^* \\ \delta A_3^* \end{bmatrix} = \sqrt{g} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \quad (3)$$

ここに $\sqrt{g}$ は、中間状態における密度を ρ' 、変形後のもを ρ として、式(2)の絶対値に等しく

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right| = \sqrt{g} = \frac{\rho'}{\rho} \quad (4)$$

である。

3. Kirchhoff 応力と有限変形における平衡式
変形後の微小6面体の側面に作用する応力を τ_i とし、

$$\tau_i = \tau^{ij} u_j + \tau^{iz} u_z + \tau^{is} u_s \quad (5)$$

のように、 τ_i の互変成分を τ^{ij} とすると、Kirchhoff の擬応力テンソル

$$T_K = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A_{10}} & \frac{\delta A_2}{\delta A_{20}} & 0 \\ 0 & \frac{\delta A_3}{\delta A_{30}} & 0 \end{bmatrix} T^*, \quad T^* = \begin{bmatrix} \tau^{11} & \tau^{12} & \tau^{13} \\ \tau^{21} & \tau^{22} & \tau^{23} \\ \tau^{31} & \tau^{32} & \tau^{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

である。また、変形後の弾性体内部の任意点の応力カテンソル T は、その点の位置ベクトル $\mathbf{x}$ の関数であり、かつ $\mathbf{x}$ は、中間状態における位置ベクトル $\mathbf{x}'$ の関数となる。すなわち $T = T(\mathbf{x}) = T\{\mathbf{x}(\mathbf{x}')\}$ であるから、応力カ T に関する平衡方程式

$$T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{f} = 0 \quad (7)$$

を $\mathbf{x}'$ についての微分方程式に変換すると、有限変形の弾性基礎式

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} T_K \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} + \mathbf{f}_0 = 0 \quad (8)$$

を得る。ここに、総和記法で、 $T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij}$ であり、 $\mathbf{f}_0 = \sqrt{g} \mathbf{f} = \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{f}$ である。

4. 任意座標系における平衡式 式(8)において、 $\mathbf{x}'$ が変形後の弾性体に埋め込まれた曲線座標と考えると、式(8)は任意曲線座標系における平衡式ともなる。ただし、式(6)において

$$\frac{\delta A_K}{\delta A_{K0}} = \sqrt{g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2} \quad (i+j \neq K)$$

と置く。ここに g_{ij} は計量テンソル $G = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right)$ の成分である。また、物体力 $\mathbf{f}$ は、曲線座標軸の方向の成分をもつ $\mathbf{f} = [f^1 f^2 f^3]^T$ に次のように変換する。すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= e_1 f^1 + e_2 f^2 + e_3 f^3 \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \end{bmatrix} \mathbf{f}' \end{aligned}$$

ここに e_i は曲線座標軸の方向の単位ベクトルである。

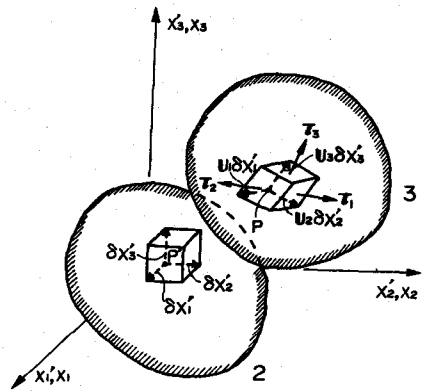


図-2 変形の中間状態における微小直方体が変形後に形成する微小6面体と応力 τ_i