

I-6 中心圧縮鋼柱の信頼性解析の一手法

—— 変位変動に及ぼす初期たわみ、荷重の変動の影響 ——

九州大学工学部 正員 百村 虎蔵

同上 学生員 石橋 治

同上 学生員 佐藤 善高

1. 予えはき

材軸方向に非定常ランダムな初期たわみを有する中心圧縮鋼柱に、確率量である軸荷重が作用した場合の鋼柱に生ずる繰応力の平均値、および標準偏差を算定し、このときの鋼柱の中心点における繰応力を使用してその安全性の評価を行なう。その解析の一手法を提案し、これをを用いて柱の応力の標準偏差に及ぼす軸荷重の平均値および変動係数の影響について検討した。

2. 解析法について

(2.1) 初期たわみを有する中心圧縮鋼柱の解析

図1のように表される、初期たわみ $W(x)$ を有し、両端単純支持の中心圧縮鋼柱を考える。この鋼柱に軸荷重 P が作用した時の付加たわみを $Y(x)$ とすると次のつり合い微分方程式が得られる

$$EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + P Y(x) = -P W(x) \quad \dots\dots (1)$$

(但し EI は曲げ剛性である)

境界条件は $Y(0)=Y(l)=Y'(0)=Y'(l)=0$ である。この境界条件を満たすように付加たわみを $Y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x/l$ とおくと、 A_n に關する条件式が次のように得られる。

$$\int_0^l \left\{ EI \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin^2 n\pi x/l + P \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} + W(x) \right) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$\text{これより} \quad A_n = P \int_0^l W(x) \sin n\pi x/l \cdot dx / \left\{ EI (l/2) (n\pi/l)^2 - (l/2) P \right\} \quad \dots\dots (3)$$

$$\text{となる。} \quad \therefore \text{正初期たわみを} \quad W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x/l \quad \dots\dots (4) \quad \text{とおくと、}$$

(3) 式を用いて付加たわみ Y は

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda / (n^2 - \lambda) \right\} a_n \sin n\pi x/l \quad \dots\dots (5)$$

となる。但し λ は P/P_{cr} であり、 P_{cr} はオイラーの座屈荷重である。

(2.2) 材軸方向に非定常ランダムな初期たわみについて

いま、非定常ランダムな初期たわみを確率変数 a_n を係数とする正弦級数であるとすれば式(4)と同様に $W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x/l$ と表わせる。 $\therefore a_n$ は次の性質を満たすと仮定する。

$$E[a_n] = 0, \quad E[a_n^2] = \sigma_{a_n}^2, \quad E[a_n \cdot a_m] = 0 \quad (n \neq m)$$

上記のこより、初期たわみの自己相関関数は、

$$\begin{aligned} R_W(x_1, x_2) &= E \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x_1/l \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x_2/l \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{a_n}^2 \sin^2 n\pi x_1/l \cdot \sin^2 n\pi x_2/l \end{aligned} \quad \dots\dots (6)$$

となる。従って材軸上の点 x における分散および材軸に沿ったその平均値はそれぞれ次のようになる²⁾

$$\left. \begin{aligned} \sigma_W^2(x) &= R_W(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{a_n}^2 \sin^2 n\pi x/l = \sigma_a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 n\pi x/l \\ \overline{W^2}(x) &= \frac{\sigma_a^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_{nn} \quad \left(\text{但し、} \sigma_a^2 = \sigma_{a_n}^2 / d_{nn} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (7)$$

3. 応力の標準偏差および安全性指標の算定

非定常ランダムな初期たわみ式(4)と同様に表わせるなら付加たわみは式(5)となり、曲げモーメントは

$$M = (EI) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda / (n^2 - \lambda) \right\} (n\pi/l)^2 \sin n\pi x / l$$

となる。最大抵抗力は断面係数を W 、断面積を A とすると

$$\sigma(x) = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{1}{A} \left(\frac{\pi l}{l} \right)^2 EI \lambda + \frac{EI}{W} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n^2 - \lambda} \right) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l}$$

となり、次にこれの平均値および分散を求める。それぞれ

$$\mu_{\sigma_{av}} = \left\{ (\pi/l)^2 EI \right\} E[\lambda] / A$$

$$\sigma_{\sigma_{av}}^2 = \left\{ (\pi/l)^4 (EI)^2 \right\} \left\{ \text{Var}(\lambda) / A^2 + \sigma_{\sigma}^2 / W^2 \sum_{n=1}^{\infty} E \left\{ \left(\frac{n\pi}{n^2 - \lambda} \right)^2 \right\} \cdot \sin^2 n\pi x / l \right\} \quad \text{----- (8)}$$

ここで安全性指標の算定については、中点の応力が降伏応力を越える状態を目安として行なう。安全性指標は次式で定義されるものを使用した。

$$\beta = (\mu_{\sigma_y} - \mu_{\sigma_{av}}) / \sqrt{\sigma_{\sigma_y}^2 + \sigma_{\sigma_{av}}^2} \quad \text{----- (9)}$$

(但し、 μ_{σ_y} 、 σ_{σ_y} は、それぞれ降伏応力の平均値および標準偏差である。)

4. 数値計算および結果について

数値計算に用いたデータ (E 、 σ_y 、 $W(x)$) は、文献 1)、2) を参考とし、初期にばみは総数の 3 項まで用い $d_{11}=1.0$ 、 $d_{22}=0.15$ 、 $d_{33}=0.03$ とし、 $\sigma_c=2/700$ とした。計算は従来検討されてきた軸荷重の変動の効果を示すことを目的として行なった。結果を要約すれば次のとおりである。

1) 降伏力の標準偏差は、両端を除いて放物線状に変化しており、変動係数が大きくなるにつれて標準偏差の変化は偏平なものになる (図 2)。また $\lambda = P/P_0$ が大きくなるにつれて軸荷重の変動係数の影響は小さくなる (図 3)。

2) 降伏力の標準偏差 (σ_y) と軸荷重の標準偏差 ($\sigma_{(P)}$) の比は、軸荷重の変動係数が大きくなる程、小さくなる傾向がある (図 4)。

3) 安全性指標 β は入け小である程、軸荷重の変動係数の変化の影響を大きく受ける (表-1)。

初期にばみをする鋼柱については当日 希 $\frac{\sigma_y}{\sigma_{(P)}}$ 表する予定である。

表 - 1

λ	σ_{λ}	0.15	0.20	0.25	0.30
0.10		25.75	23.90	22.03	20.24
0.20		11.03	10.23	9.414	8.638
0.25		7.868	7.310	6.739	6.189
0.30		5.764	5.363	4.946	4.863
0.35		4.282	3.982	3.666	3.351

(参考文献)

図 - 4

- 1) 青木徹彦、福本晴士：溶接 H 形鋼柱の圧縮強度の分布について：土木学会論文報告集第 222 号、1974、2 月
- 2) 藤本 盛久、若田 信行：鋼圧縮材の確率論的方法による設計：建築学会論文集、第 218 号、549、4 月
- 3) 白木 達高、岡室 善：非定常初期にばみをする圧縮部材の信頼性解析：第 33 回 構造工学集、1972、9 月
- 4) Michael C. Bernard: Buckling of columns with Random initial displacement, ASCE Vol. 97, EM3.

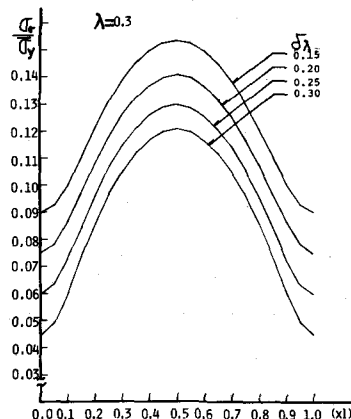


図 - 2

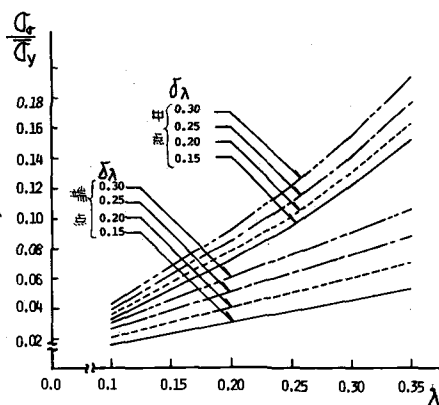


図 - 3

