

I-1 正方形箱形断面をもつ円弧曲線桁の弾塑性解析

九州大学 学生員 金子常光

正員 今井富士夫

学生員 日野伸一

1. まえがき 部材に曲げとねじりの組み合せ荷重を受ける円弧曲線桁の弾塑性解析法としては、塑性ヒンジ理論による極限解析法があるが、この解析法は、塑性域のねじりを考慮できない簡易解析法であり、より厳密な円弧曲線桁の弾塑性挙動を追跡するためには、部材の断面内と部材軸方向の塑性域のねじりを考慮しうる弾塑性解析法が必要となってくる。本解析法は、部材軸方向の塑性域のねじりについては、塑性変形量を考慮しうる補エネルギー法を用いた変形法を採用し、断面内の塑性域のねじりについては、ひずみ増分理論と断面分割法とを併用したものを採用している。なお、断面については、基礎的な段階として、その影響を無視できる薄肉正方形箱形断面を用い、解析上用いた仮定は、垂直応力に対しては平面保持の法則が成立すること、およびせん断応力に対しては断面は不変でかつ断面内で一様であることの2点である。

2. 基礎理論 n 分割した円弧曲線桁の1部材要素 AB が図-1に示す様に、直交座標 (x, y, z) の xy 平面にあるものとし、部材上の任意点 E において部材の接線、法線方向に (t, r) の流動座標を考える。4点としては、部材の弾性重心を採用し、これを原点とする直交固定座標 (X, Y, Z) と規定する。固定基本系として、 B 端固定の片持ばりを考へ、4点 A を剛接で結び、面外荷重に対しては、 Z 軸方向の力 P と、 X, Y 軸まわりのモーメント M_x^0, M_y^0 の3つの不静定力を考えると、 E 点での面外断面力は、次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} M^r &= -M_y^0 \sin \varphi + M_x^0 \cos \varphi + F_y^0 \cdot \eta \\ M^t &= M_y^0 \cos \varphi + M_x^0 \sin \varphi + F_y^0 \cdot \zeta \\ F^z &= F_y^0 \end{aligned} \right\} \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{こゝに、} \eta = R \theta_0 \sin \varphi, \zeta = R(1 - \theta_0 \cos \varphi), \theta_0 = \sin \varphi / \varphi$$

面外力によって生じる補ひずみエネルギーは、せん断エネルギーは無視すると、

$$U^* = \int_A^B \int_{M^r} \phi^r dM^r ds + \int_A^B \int_{M^t} \phi^t dM^t ds \quad \text{-----(2)}$$

よって、面外変形は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_y^0 &= \frac{\partial U^*}{\partial M_y^0} = \int_A^B \phi^r \frac{\partial M^r}{\partial M_y^0} ds + \int_A^B \phi^t \frac{\partial M^t}{\partial M_y^0} ds \\ \theta_x^0 &= \frac{\partial U^*}{\partial M_x^0} = \int_A^B \phi^r \frac{\partial M^r}{\partial M_x^0} ds + \int_A^B \phi^t \frac{\partial M^t}{\partial M_x^0} ds \\ \Delta_y^0 / R &= \frac{\partial U^*}{\partial F_y^0} = \int_A^B \phi^r \frac{\partial M^r}{\partial F_y^0} ds + \int_A^B \phi^t \frac{\partial M^t}{\partial F_y^0} ds \end{aligned} \right\} \quad \text{-----(3)}$$

こゝで、 $\phi^r = \frac{M^r}{EI} + \phi^p$, $\phi^t = \frac{M^t}{GJ} + \omega^p$ (ただし、 ϕ^p, ω^p は塑性項) として計算を行うと、次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \theta_y^0 \\ \theta_x^0 \\ \Delta_y^0 / R \end{Bmatrix} = \frac{R}{EI} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_y^0 \\ M_x^0 \\ RF_y^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}, \text{あるいは } \theta_y^0 = \frac{R}{EI} BM_y^0 + L_{AB} \quad \text{-----(4)}$$

$$\begin{aligned} \text{こゝに、} a_1 &= \alpha + K_1 \beta, a_2 = 0, a_3 = -\theta_0(\alpha + K_1 \beta) + 2K_1 \sin \varphi, b_1 = 0, b_2 = \beta + K_1 \alpha, b_3 = 0, c_1 = a_3, c_2 = 0, \\ c_3 &= \theta_0^2 \alpha + K_1(2\varphi - 4\theta_0 \sin \varphi + \theta_0^2 \beta), L_1 = \int_A^B (-\phi^p \sin \varphi + \omega^p \cos \varphi) ds, L_2 = \int_A^B (\phi^p \cos \varphi + \omega^p \sin \varphi) ds, \\ L_3 &= \int_A^B (\phi^p \theta_0 \sin \varphi + \omega^p(1 - \theta_0 \cos \varphi)) ds, K_1 = \frac{EI}{GJ}, \alpha = \varphi - \sin \varphi \cos \varphi, \beta = \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

次に、4点と両材端 A, B の変形成分との関係式を求めると、

$$\begin{Bmatrix} \theta_y^0 \\ \theta_x^0 \\ \Delta_y^0 / R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^x & Q_2^x & Q_3^x & Q_4^x \\ Q_1^y & Q_2^y & Q_3^y & Q_4^y \\ Q_1^z & Q_2^z & Q_3^z & Q_4^z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_A^x \\ T_A^y \\ T_B^x \\ T_B^y \end{Bmatrix}, \text{あるいは } \theta_y^0 = Q T_{AB} \quad \text{-----(5)}$$

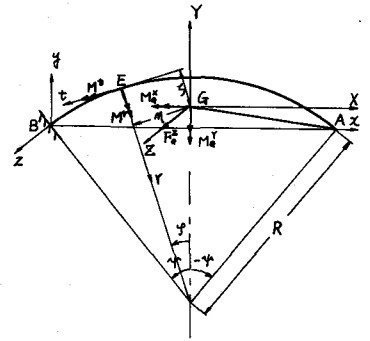


図-1

$$\begin{aligned} \text{ニニに、} Q_1^x = Q_3^x = \sin \psi, \quad Q_2^x = Q_1^y = \cos \psi, \quad Q_4^x = Q_3^y = -\cos \psi, \quad Q_1^z = Q_3^z = -\theta_0 \sin \psi, \\ Q_2^z = 1 - \theta_0 \cos \psi, \quad Q_4^z = -Q_2^z \end{aligned}$$

すな、材端モーメント $M_A^r, M_A^z, M_B^r, M_B^z$ は、式(1)より

$$M_{AB} = Q^T M_q, \quad \text{ニニに} \quad M_{AB} = \{M_A^r M_A^z M_B^r M_B^z\}^T \quad \text{---- (6)}$$

式(4), (5), (6)を M についでると、さらに、増分形式に改めると、

$$\dot{M}_{AB} = \frac{EI}{R} Q^T B^{-1} Q \dot{\bar{u}}_{AB} - \frac{EI}{R} Q^T B^{-1} \bar{L}_{AB} \quad \text{---- (7)}$$

式(7)は、各要素要素におけるモーメントと変形のつりあい式であり、これを全体系で表示すると、

$$\dot{M} = K \dot{\bar{u}} - K_p \bar{L} \quad \text{---- (8)}$$

さらに、変形の適合条件式は、たわみ角増分と材端変位増分を一括したものを $\dot{\bar{\theta}}$ とすれば、

$$\dot{\bar{u}} = A_0 \dot{\bar{\theta}} \quad \text{---- (9)}$$

一方、力のつりあい式は、外力の増分を $\dot{P}$ とすれば、反傾関係より

$$\dot{P} = A_0^T \dot{M} \quad \text{---- (10)}$$

式(8), (9), (10)を $\dot{\bar{\theta}}$ と M について整理し、まとめれば、

$$\begin{aligned} \dot{M} &= K A_0 \dot{\bar{\theta}} - K_p \bar{L} \\ \dot{\bar{\theta}} &= (A_0^T K A_0)^{-1} \dot{P} + (A_0^T K A_0)^{-1} A_0^T K_p \bar{L} \end{aligned} \quad \text{---- (11)}$$

式(11)より、円弧曲線桁の弾塑性解析が可能となるが、式中の未知量である $\bar{L}$ は、大きい要素に分割した部要素 AB と、さらに細かく k 分割した各々の断面ごとの曲げモーメント-曲率、ねじりモーメント-ねじり率関係を求めれば算定できる。その演算骨子は次の通りである。

図-2に示す薄肉正方形箱形断面の外力と内力のつりあい式は、

$$\dot{M} = - \int_A \bar{u} dA, \quad \dot{N} = \int_A \bar{v} dA, \quad \dot{T} = \int_A \bar{t} dA \quad \text{---- (12)}$$

ニニに、 M : 曲げモーメント, N : 軸力, T : ねじりモーメント,

$\bar{u}$: 垂直応力, $\bar{v}$: セン断応力, A : 断面積

次いで、応力増分とひずみ増分の関係式は、Reuss の方程式を用いて、

$$\bar{u} = E \dot{\epsilon} - \frac{2}{3} \bar{u} \dot{\epsilon} \lambda, \quad \bar{v} = G \dot{\gamma} - 2 \bar{v} \dot{\gamma} \lambda \quad \text{---- (13)}$$

ニニに、 E : ヤング率, G : セン断弾性係数, $\dot{\epsilon}$: 垂直ひずみ, $\dot{\gamma}$: セン断ひずみ

ニニに、式(13)中の λ は、Mises の降伏条件式を用いれば、次式で与えられる。

$$\lambda = (E \dot{\epsilon} + 3 G \dot{\gamma}) / \left(\frac{2}{3} E \dot{\epsilon}^2 + 6 G \dot{\gamma}^2 \right) \quad \text{---- (14)}$$

さて、平面保持の法則より、任意高さの垂直ひずみ増分は、上、下縁垂直ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_u, \dot{\epsilon}_l$ を用いて

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{a} \right) \dot{\epsilon}_l + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{a} \right) \dot{\epsilon}_u \quad \text{---- (15)}$$

よって、曲率増分中は、平面保持の法則より、

$$\dot{\phi} = (\dot{\epsilon}_l - \dot{\epsilon}_u) / 2a \quad \text{---- (16)}$$

一方、ねじり率増分は、正方形箱形断面ゆえにその影響を無視し、断面不変の法則およびせん断応力は断面内で一様と仮定するならば次式となる。

$$\dot{\omega} = \frac{1}{4a} \left\{ \dot{\bar{v}} + \phi (G \dot{\gamma} \lambda / 4a) \right\} ds \quad \text{---- (17)}$$

式(16), (17)より、変形法公式中の $\bar{L}$ が算定できることになる。

以上、ニニには、基礎式の誘導のみを行、したが、数値結果については当日発表する予定である。

<参考文献>

- 1) 今井、太田; 円弧曲線桁の終局耐力および塑性挙動, 九大工学集報, 第51巻, 第5号, 昭和53年
- 2) 太田、中沢; 曲げおよびねじりを受ける鋼管の弾塑性解析, 九大工学集報, 第46巻, 第4号, 昭和48年