VII－17　　三角網の測点座標の区間推定

熊本大学工学部　正員　○三池亮次
同上　学生員　菊地澄男

1．はじめに，従来誤差論において，平均二乗誤差をもって解の精度を評価するのが慣例であった。平均二乗誤差は不偏分散の平方根であり誤差の目安を与えるものであるが，母標準偏差の推定値として必ずしも妥当とは言えない。むしろ，未知量の取り得る信頼区間を，ある確率で推定することが望ましいものと考える。そのような解析は区間推定の手法と言われ，たとえば Linik は条件付直接測定の問題において，未知量の取り得る区間推定の解析を試みている。

ここでは一般に条件付間接測定の問題において，回帰係数の区間推定と，この回帰係数と線形の関係にある任意の値，たとえば三角測量の問題において，測角の線形変換として誘導される測点座標の信頼区間を，ある信頼係数で推定することを検討した。

2．条件付間接測定の区間推定　条件付間接測定の回帰係数および回帰関数の区間推定の式の誘導については，すでに発表済である[1]ので，ここでは証明なしに，式の紹介に留める。

確定変数マトリックス $\mathbb{X}\ (n\times p)$ と従属変量ベクトル $\mathbb{y}$ との間に

$$\mathbb{y}=\mathbb{X}\beta+\mathbb{e} \tag{1}$$

が成立するものとする。ここに $\beta\ (1\times p)$ は偏回帰係数，$\mathbb{e}\ (1\times n)$ は偏差ベクトルである。偏回帰係数 β について

$$\phi=a_0+A\beta=0 \tag{2}$$

の条件が成立するものとする。ここに $a_0\ (r\times 1)$ は定数ベクトル，$A\ (r\times p)$ はその係数マトリックスである。条件式(2)の下での β の推定値は，

$$\hat{\beta}=\hat{\beta}_0-S_q^{-1}A^{(t)}S_{Aq}^{-1}w \tag{3}$$

ここに，Q を重さのマトリックスとして

$$S_q=\mathbb{X}^{(t)}Q\mathbb{X}\ ,\ S_{Aq}=AS_q^{-1}A^{(t)},\ \hat{\beta}_0=S_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)}Q\mathbb{y}\ ,\ w=a_0+A\hat{\beta}_0 \tag{4}$$

である。また，残差平方和 S_E と，単位の重さの母分散 σ^2 の不偏推定値 V は

$$S_E=\mathbb{y}^{(t)}Q\mathbb{y}-\hat{\beta}_0^{(t)}\mathbb{X}^{(t)}Q\mathbb{y}+w^{(t)}S_{Aq}^{-1}w\ ,\quad V=\frac{S_E}{n-(p-r)} \tag{5}$$

で，$\hat{\beta}$ の分散共分散マトリックスは

$$Cov[\hat{\beta}]=\sigma^2\left[S_q^{-1}-(AS_q^{-1})^{(t)}S_{Aq}^{-1}(AS_q^{-1})\right]\equiv\sigma^2 S_{\hat{\beta}} \tag{6}$$

である。また，回帰係数 β と線形の関係にある関数 μ' およびその推定値 $\hat{\mu}'$ が，

$$\mu'=x_0+\mathbb{X}'\beta\ ,\quad \hat{\mu}'=x_0+\mathbb{X}'\hat{\beta} \tag{7}$$

で与えられるとき，μ' の α 番目の要素 μ'_α の，信頼係数が95％の信頼区間は，

$$\hat{\mu}'_\alpha-t\{n-(p-r);0.05\}\sqrt{D_{\alpha\alpha}V}<\mu'_\alpha<\hat{\mu}'_\alpha+t\{n-(p-r);0.05\}\sqrt{D_{\alpha\alpha}V} \tag{8}$$

ここに、$t\{n-(p-r);0.05\}$ は、自由度が $n-(p-r)$ の t 分布の両側5%点であり、$D_{\alpha\alpha}$ は

$$\mathbb{D}=\mathbb{X}'\mathbb{S}_{\beta}\mathbb{X}'^{(t)} \qquad (9)$$

の α 番目の対角要素である。

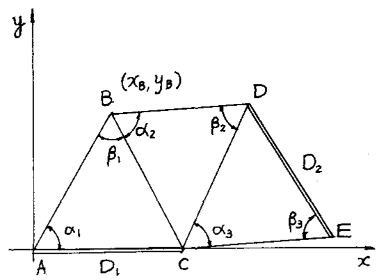

図-1　単列三角鎖の測量

3. 適用例　右図に示す単列三角鎖において、α_i, β_i　$i=1,2,3$ と基線 D_1 および検基線 D_2 を測定して $\alpha_i=\beta_i=60°$　$D_1=50^m$ $D_2=50.01^m$ を得た。各測定値を等重として、測点Bの座標 (x_B, y_B) の区間推定を試みる。

角度 α_i, β_i およびその観測値をベクトルで表示して $\beta^{(t)}=[\alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3\ \beta_3]$ および $y^{(t)}=[y_{\alpha1}\ y_{\beta1}\ y_{\alpha2}\ y_{\beta2}\ y_{\alpha3}\ y_{\beta3}]$ とすると、式(1)の観測方程式において、$\mathbb{X}=\mathbb{I}$（$\mathbb{I}$は単位マトリックス）であり、

$$\beta=\bar{\beta}+\Delta\beta, \quad y=\bar{y}+\Delta\bar{y}$$

ここに $\Delta\beta^{(t)}=[\Delta\alpha_1''\ \Delta\beta_1''\ \Delta\alpha_2''\ \Delta\beta_2''\ \Delta\alpha_3''\ \Delta\beta_3'']$ は $\bar{\alpha}_i=60°$, $\bar{\beta}_i=60°$ となるように選び、かつ $\bar{\beta}=\bar{y}$ とすれば、$\Delta y=0$ で、観測方程式は

$$\Delta y=\mathbb{I}\cdot\Delta\beta+e$$

となる。辺条件式を式(2)で表わせば、式(2)において

$$A=d[1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1] \qquad d=21.055\times10^{-7}\cot\bar{\alpha}_i=1.216\times10^{-6}$$

$$a=\log D_1-\log D_2+\sum\log\sin\bar{\alpha}_i-\sum\log\sin\bar{\beta}_i=\log\frac{50}{50.01}=8.7\times10^{-5}$$

$$\mathbb{S}_{Aq}=AA^{(t)}=6d^2 \qquad \Delta\hat{\beta}_0=\mathbb{S}_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\Delta y=0, \qquad w=a+A\Delta y=a=-8.7\times10^{-5}$$

式(3)により

$$\Delta\hat{\beta}=\Delta y-A^{(t)}\mathbb{S}_{Aq}^{-1}w=\{(-1)^{\alpha}\cdot12.0''\}$$

であるから、最確値は

$$\hat{\alpha}_i=60°12'' \qquad \hat{\beta}_i=59°59'48'' \qquad i=1,2,3$$

を得る。また

$$S_E=w^{(t)}\mathbb{S}_{Aq}^{-1}w=\frac{1}{6}\frac{a^2}{d^2}$$

であり、

$$\mathbb{S}_{\beta}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&1&-1&1&-1&1\\ &5&1&-1&1&-1\\ &&5&1&-1&1\\ &&&5&1&-1\\ &&&&5&1\\ \text{sym.}&&&&&5\end{bmatrix} \qquad \mathbb{X}'=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_B}{\partial\alpha_1}&\frac{\partial x_B}{\partial\beta_1}&0&0&0&0\\ \frac{\partial y_B}{\partial\alpha_1}&\frac{\partial y_B}{\partial\beta_1}&0&0&0&0\end{bmatrix}\rho=\begin{bmatrix}-57.74&-28.87&0&0&0&0\\ 0&-50&0&0&0&0\end{bmatrix}\rho$$

である。$\rho=4.848\times10^{-6}$ であり

$$x_B=D_1\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{\sin\beta_1}\cos\alpha_1 \qquad y_B=D_1\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{\sin\beta_1}\sin\alpha_1$$

$$=25.00\ m \qquad\qquad =43.30\ m$$

である。これより $\mathbb{D}=\mathbb{X}'\mathbb{S}_{\beta}\mathbb{X}'^{(t)}$ を求め、式(8)により、信頼係数95%の x_B, y_B の信頼区間

$$x_B=25.00^m\pm0.10^m \qquad y_B=43.30^m\pm0.08^m$$

を得る。

参考文献　1) 三池亮次："条件付間接測定における区間推定"、土木学会第32回年次学術講演会　昭和52年10月