VI − 17　　一般断面形水路における二層流の基礎式

長崎大学工学部　正員　古本勝弘

緒言

内部境界面での混合が無視される二層流が，河川で代表される一般断面形水路に流れる場合の水面形，境界面形状を計算する方法をこゝでは述べている。一定水路幅の水平床水路に侵入する塩水楔については，摩擦抵抗係数 f_i，水深 H が一定であるとして，Farmar-Morgan，Schijf-Shönfeld 等が解析的に求めている。しかし，抵抗係数 f_i は種々の水理量に関係していることが明らかにされており，また現地観測により描かれる楔形状或いは等濃度線は水路幅，水路床等の水路断面形の変化の影響を受けて変形することが認められ，前記の理論解をそのまゝ河川に用いるには無理がある。このため河川の不等流水面形の計算法に類似した二層流の計算法を考え実用に供してみようとするものである。

基礎式

座標軸は右図のように水平流れ方向に x-軸，鉛直上向きに z-軸をとる。二層流を一次元漸変流とし，水表面，境界面は y-軸方向には水平，圧力は静水圧分布と考える。上下層を分離して考え夫々の層の任意点での圧力は

$$
\begin{aligned}
p &= \rho_1 g(h_1+h_2+\zeta-z) = \rho_1 g(H-z) \\
p &= \rho_1 g h_1 + \rho_2 g(h_2+\zeta-z) = \rho_1 g H + (\rho_2-\rho_1) g H_i - \rho_2 g z
\end{aligned}
\quad \cdots (1)
$$

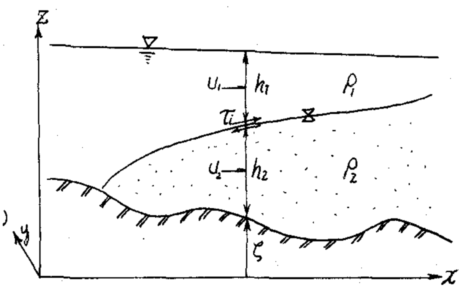

図 − 1

但し，H, H_i は水表面，境界面の z 座標（標高）である。河川では断面積 A，水面幅 B 等が標高に対して作図されているので h_1, h_2 よりも H, H_i を用いておく方が便利である。

任意点の流れ方向運動方程式は連続の式を用いて

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \cdots (2)
$$

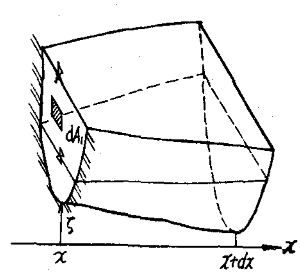

図 − 2

であるが平均流に関する運動方程式を導びくため (2) 式に (1) を代入し，図-2 の Δx 区間の閉曲面の上，下層流体について別々に積分する。

$$
\int \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z}\right) dV + g\int \frac{\partial H}{\partial x} dV - \frac{1}{\rho_1}\int \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dV = 0
$$

$$
\int \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int u v_n \, dS + g\int H\cos(x,n)\, dS - \frac{1}{\rho_1}\int \left(\tau_{yx}\cos(y,n) + \tau_{zx}\cos(z,n)\right) dS = 0 \quad \cdots (3)
$$

こゝに dV, dS は閉曲面の体積要素，面積要素であり，n は面の外向法線を示し，v_n は面に垂直な速度成分である。添字 s, i は水面，境界面での量を，B は z の高さの水面幅を示すこととし，夫々の項を閉曲面で考えると，

$$
\int \frac{\partial u}{\partial t} dV = \left(\int \frac{\partial u}{\partial t} dA_1\right) dx = \left(\frac{\partial}{\partial t}\int u\, dA_1 - u_s B_s \frac{\partial H}{\partial t} + u_i B_i \frac{\partial H_i}{\partial t}\right) dx
$$

$$
\int u v_n \, dS = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int u^2 dA_1\right) dx + u_s \frac{\partial H}{\partial t} B_s \, dx - u_i \frac{\partial H_i}{\partial t} B_i \, dx
$$

$$
\int H\cos(x,n)\, dS = \frac{\partial}{\partial x}(HA_1)\, dx - H\frac{\partial A_1}{\partial x} dx = A_1 \frac{\partial H}{\partial x} dx
$$

$$
\int \frac{1}{\rho_1}\left(\tau_{yx}\cos(y,n) + \tau_{zx}\cos(z,n)\right) dS = -\frac{1}{\rho_1}\left\{\tau_i B_i \, dx + \tau_{01}(B_s - B_i)\, dx\right\}
$$

こゝに，τ_i，τ_{01} はそれぞれ境界面，上層の両側河床での摩擦応力であり，A_1 は上層のみの流水断面積である。また水深に比し，B が大であるとして潤辺 $\equiv B$ としている。従って，(3) 式は次のようになる。

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta_1 U_1^2}{2g}\right)+(1-\beta_1)\frac{U_1}{gA_1}\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\tau_i}{\rho_1 g A_1}B_i+\frac{\tau_{01}}{\rho_1 g A_1}(B_s-B_i)=0 \qquad \cdots(4)$$

但し，$U_1=\int u\,dA_1/A_1$，$\beta_1=\int u^2 dA_1/U_1^2 A_1$　であり連続の式を用いている。下層の運動の方程式も同様の方法で導びけ，

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta_2 U_2^2}{2g}\right)+(1-\beta_2)\frac{U_2}{gA_2}\frac{\partial A_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{(1-\varepsilon)H+\varepsilon H_i\}-\frac{\tau_i B_i-\tau_{02}B_i}{\rho_2 g A_2}=0 \qquad \cdots(5)$$

こゝに，$\varepsilon=(\rho_2-\rho_1)/\rho_2$，$\tau_{02}$ は下層の河床での摩擦応力である。τ_i は一般に $\tau_i=(f_i/2)(\rho_2+\rho_1/2)|U_1-U_2|(U_1-U_2)$ で表わされている。抵抗係数 f_i は定常塩水楔について現地実測，実験から調べられ次式を得ている。

$$f_i=C\left[R_e\cdot F_i^2\right]^{-n}=C\left[U_1^3/\nu\varepsilon g\right]^{-n}$$

こゝに $R_e=U_1 h_1/\nu$，$F_i^2=U_1/\sqrt{\varepsilon g h_1}$　である。

定数 C，n は種々提案され確定的値ではないが，金子氏は $C=0.2$，$n=-0.5$ を得ている。

定常二層流の計算手順

定常流の場合は基礎式(4)(5)の夫々1，3項が0となる。また上下層の流量 Q_1，Q_2 はそれぞれ Const. であり，$A_1=\int_{H_i}^{H}B\,dz$，$A_2=\int_{\zeta}^{H_i}B\,dz$　であるので第2項はそれぞれ次のように変形される。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\beta_1 U_1^2}{2g}\right)=-\frac{\beta_1 Q_1^2}{gA_1^3}\frac{dA_1}{dx}=-\frac{\beta_1 Q_1^2}{gA_1^3}\left(B_s\frac{dH}{dx}-B_i\frac{dH_i}{dx}+\int_{H_i}^{H}\frac{dB}{dx}dz\right),\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\beta_2 U_2^2}{2g}\right)=-\frac{\beta_2 Q_2^2}{gA_2^3}\left(B_i\frac{dH_i}{dx}+\int_{\zeta}^{H_i}\frac{dB}{dx}dz\right)$$

故に(4)(5)式は

$$\left(1-\varepsilon F_{i1s}^2\right)\frac{dH}{dx}+\varepsilon F_{i1i}^2\frac{dH_i}{dx}=-I_1 \qquad \cdots(6) \qquad\qquad (1-\varepsilon)\frac{dH}{dx}+\varepsilon\left(1-F_{i2}^2\right)\frac{dH_i}{dx}=-I_2 \qquad \cdots(7)$$

こゝに

$$F_{i1s}^2=\frac{\beta_1(Q_1/A_1)^2}{\varepsilon g(A_1/B_s)},\qquad F_{i1i}^2=\frac{\beta_1(Q_1/A_1)^2}{\varepsilon g(A_1/B_i)},\qquad F_{i2}^2=\frac{\beta_2(Q_2/A_2)^2}{\varepsilon g(A_2/B_i)}$$

$$I_1=\frac{\tau_i}{\rho_1 g(A_1/B_i)}+\frac{\tau_{01}}{\rho_1 g A_1/(B_s-B_i)}-\frac{\beta_1 Q_1^2}{gA_1^3}\int_{H_i}^{H}\frac{dB}{dx}dz,\qquad I_2=\frac{\tau_{02}-\tau_i}{\rho_2 g(A_2/B_i)}-\frac{\beta_2 Q_2^2}{gA_2^3}\int_{\zeta}^{H}\frac{dB}{dx}dz$$

(6)(7)から

$$\frac{dH}{dx}=\left\{-I_1\left(1-F_{i2}^2\right)+I_2F_{i1i}^2\right\}/D \qquad \cdots(8) \qquad\qquad \frac{dH_i}{dx}=\left\{(I_1-I_2)/\varepsilon-\left(I_1-I_2F_{i1s}^2\right)\right\}/D \qquad \cdots(9)$$

$$D=1-F_{i1i}^2-F_{i2}^2+\varepsilon\left(F_{i1i}^2-F_{i1s}^2+F_{i1s}^2F_{i2}^2\right)\fallingdotseq 1-F_{i1i}^2-F_{i2}^2 \qquad \cdots(10)$$

工学的な二層流の問題は主として水面形，境界面形を求めること，すなはち(8)(9)式を適当な境界条件の下に解くことである。Q_1，Q_2 は外的条件から与えられ，また x 方向に適当な間隔で水路断面形が測量され $Z\sim A$，$Z\sim B$ 曲線が描かれているとすれば，A，B は H，H_i が決まれば求められる量であるので(8)(9)式は H，H_i に関する連立常微分方程式となる。(8)(9)式を次のように表現しておく。　$dH/dx=f(H,H_i)$，　$dH_i/dx=g(H,H_i)$ … (11)

境界条件は一般に河口のような断面を急変させる点で与えられる。この様な地点では流れが急拡大するので，上下層厚が急変し，dH_i/dx が非常に大きい故，(9)式の分母 $D=1-F_{i1i}^2-F_{i2}^2=0$ が成立する。この式を満足する様に H，H_i を決めて境界条件とする。流れは常流であるので上流に向って逐次計算を進める。計算は A，B を読みながら進めなければならないので複雑な方法は用い得ない。Euler-Gauss 法が適当であろう。

計算手順は次のようである。下流断面Ⅰの H_I，H_{iI} が既知で Δx 上流のⅡ断面の H_{II}，H_{iII} を求めるものとする。(11)式の表示を用いて，Ⅰ断面で $f_I(H_I,H_{iI})$，$g_I(H_I,H_{iI})$ を計算し，Ⅱ断面の第一近似 $H_{II}^{(1)}=H_I-f_I\Delta x$，$H_{iII}^{(1)}=H_i-g_I\Delta x$

次に，その値を用いて $f_{II}^{(1)}(H_{II}^{(1)},H_{iII}^{(1)})$，$g_{II}^{(1)}(H_{II}^{(1)},H_{iII}^{(1)})$ を求める。第二近似を次式（Euler-Gauss 公式）で求める。

$H_{II}^{(2)}=H_I-(f_I+f_{II}^{(1)})/2\cdot\Delta x$，　$H_{iII}^{(2)}=H_i-(g_I+g_{II}^{(1)})\Delta x/2$　。このEuler-Gauss 式を反復し，第 n 次，第 $n+1$ 次の値が必要な精度で一致したら，$n+1$ 次の値をⅡ断面の値とする。この計算法を順次上流断面に移して H，H_i を求めてゆく。

参考文献

1) 椿　水理学Ⅰ　森北出版

2) 土木学会，水理公式集

3) 金子安雄，二層流境界面抵抗係数の一例　第13回海岸工学講演会講演集　S41.