V－19　細管網内の移流分散の数値解について

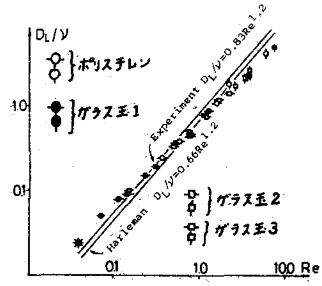
九州大学　工学部　○学生員　下茂道人

正　員　神野健二

正　員　上田年比古

序　浸透層や岩盤のキ裂の中を、拡散物質が、移流分散する現象は、今後、増大する地下水揚水や、地下水質の保全を考える上で、重要である。一様で等方な浸透層内の移流分散現象については、Saffman[1]の細管結合体モデルによる統計解析、および筆者の検討の結果[2]より、レイノルズ数が10^{-1}〜10^{1}の範囲の層流域では、空隙内の流速分布の空間的変動と、個々の土粒子壁から空隙中央へ向う分子拡散との効果が支配的であろう。図－1は、Harleman[3]らの実験結果と、筆者の実験結果、および細管結合体モデルによるSaffmanの統計解析を、筆者のデータを用いて算定した図である。この図から、浸透層の流れの場を細管結合体でモデル化することが妥当であると考えられる。一方、R. J. Krizek, E. Castillo, G. M. Karadi[4,5]らは、キ裂のλ。た岩盤中の層流、乱流下での移流分散を、一次元波動方程式で考えている。この場合、分子拡散、および乱流拡散の効果を無視しているので、実験値との比較で、10%程度の誤差が示されている。したがって、本報では、非等方非一様である浸透層や、岩盤のキ裂の中の移流分散現象に、拡散効果を加えて考え、濃度分布を予測する方法を、検討するものである。

試　料	平均粒径	標準偏差
ポリスチレン	0.1282cm	0.00564cm
ガラス玉　1	0.0505	0.00489
ガラス玉　2	0.1099	0.01035
ガラス玉　3	0.2740	0.04293



図－1　実測レイノルズ数を用いて算定したSaffmanの理論による縦方向分散係数

1　細管内の移流分散について　G. I. Taylor[6]は、細管中の移流分散現象で、層流の場合の、縦方向(流れ方向)の分散を支配する式は、$x_1=x-\bar{U}t$ を用いて、$K\frac{\partial^2 C_m}{\partial x_1^2}=\frac{\partial C_m}{\partial t}$，$K=\frac{a^2\bar{U}^2}{48D}$　―(1)

で与えられることを示している。ここに、C_m；断面平均濃度，K；みかけの拡散係数，D；分子拡散係数，a；管の半径，$\bar{U}$；平均流速である。なお、上式におけるみかけの拡散係数Kの表現は、$L/a \gg \bar{U}a/D \gg 6.9$（$L$；移流分散が、十分に生じるのに必要な距離）の範囲内、すなわち、(1)縦方向の分子拡散が、Kの効果に比べて無視できる。(2)移流分散が、十分に生じるのに必要な距離をもつ場合のみ有効とされている。

2　グラフ理論について[7]　図－2に示すような、細管網内を、拡散物質が、移流分散する現象を考えるときに、各細管の管径，管長，管内流速が異なり、各細管の移流分散係数が異なる場合や、細管の数が多い場合にはグラフ理論が、有効であろう。グラフ理論では、細管網を、節点と枝とにわけ、さらに、すべての枝を木(tree)と、補木(co-tree)と呼ばれる2組の枝の集合にわける。木は、閉回路を作ることなく、すべての節点を連結する枝の集合であり、補木は、すべての枝から木の部分を除いた枝の集合である(図-2参照)。節点数n個、枝の数e個の管路網において、未知数の数は、各枝ごとの流量Q_iと損失水頭H_iのあわせて2e個である。今、任意の木の枝を取り除いて管路網を二分するとき、net-flowが保存されなければならないことを意味する、(n−1)個のカットセット方程式 $\mathbb{A}_f\cdot\mathbb{Q}=\begin{array}{cc}\text{tree} & \text{co-tree}\end{array}\left[\begin{array}{cc}\mathbb{U} & \mathbb{A}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbb{Q}_T\\ \mathbb{Q}_{T'}\end{bmatrix}$，木に任意の補木の枝を付加してできる閉回路にそっての損失水頭の和が0であることを示す(e−n+1)個のサーキット方程式 $\mathbb{B}_f\cdot\mathbb{H}=\begin{array}{cc}\text{tree} & \text{co-tree}\end{array}\left[\begin{array}{cc}\mathbb{B} & \mathbb{U}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbb{H}_T\\ \mathbb{H}_{T'}\end{bmatrix}$ および terminal-equationとして、流量－損失水頭の関係式(e個)　$\mathbb{Q}=\mathbb{F}\cdot\mathbb{H}$　より、すべての細管の流量、平均流速、みかけの拡散係数を求めることができる。上式において、$\mathbb{A}_f$；カットセット行列，$\mathbb{B}_f$；サーキット行列，$\mathbb{U}$；単位行列，添字T, T'；それぞれ木および補木の量を示す。なお、本報においては、層流の場合のみを扱っているので、terminal-equationとして、Hagen-Poiseuilleの式を用いているが、乱流の場合、流量と損失水頭が、非線型関係であっても、くり返し計算により、同様の取り扱いができる。

3　一本の細管についての式

図-2の細管網における、個々の細管の両端の濃度は、時間的に変化するので、(1)式を時間について差分化する。すなわち $\dfrac{d^2C_m^{N+1}}{dx_1^2}-\alpha^2C_m^{N+1}=-\alpha^2C_m^N$ －(2)となり、この解は $C_m^{N+1}(x_1)=Ae^{\alpha x_1}+Be^{-\alpha x_1}-\alpha\int_{-\overline{U}N\Delta t}^{x_1}C_m^N(\xi)\sinh\alpha(x_1-\xi)d\xi$ －(3) で与えられる。ここに、$\alpha=K^{-\frac{1}{2}}\Delta t^{-\frac{1}{2}}$, $x_1=x-\overline{U}\Delta t$, Δt；時間のきざみ幅, N；ステップ数, A, B；定数である。

4　細管網内の移流分散の解析

4.1. 各細管の両端における濃度

(3)式に $x=0$, $x=l_i$ を代入し、行列表示すると、$\mathbb{C}_0=\mathbb{P}_1\mathbb{A}_1+\mathbb{P}_2\mathbb{B}$ －(4) $\mathbb{C}_l=\mathbb{R}_1\mathbb{A}+\mathbb{R}_2\mathbb{B}+\mathbb{R}_3$ －(5) ここに l_i；各細管の長さ、$\mathbb{C}_0, \mathbb{C}_l$；各細管の入口と出口の濃度の列ベクトル, $\mathbb{A}, \mathbb{B}$；A_i, B_i を成分とする列ベクトル, $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$, それぞれ $e^{-\alpha\overline{U}_iN\Delta t}$, $e^{\alpha\overline{U}_iN\Delta t}$, $e^{\alpha(l_i-\overline{U}_iN\Delta t)}$, $e^{-\alpha(l_i-\overline{U}_iN\Delta t)}$ を対角成分にもつ対角行列、$\mathbb{R}_3$；$-\alpha\int_{-\overline{U}_iN\Delta t}^{l_i-\overline{U}_iN\Delta t}C_i^N(\xi)\sinh\alpha(l_i-\overline{U}_iN\Delta t-\xi)d\xi$ を成分とする列ベクトル

添字 i；i 番目の細管における値を示す。

4.2. 各細管両端の濃度と節点濃度との関係

図-3に示すような例で節点において完全混合を仮定すると、各細管の両端の濃度は、それが接続している節点の濃度に等しいと考えることができる。すなわち

$$\begin{pmatrix}C_{10}\\C_{20}\\C_{30}\\C_{40}\\C_{50}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_a\\C_a\\C_b\\C_b\\C_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_a\\C_b\\C_c\\C_d\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}C_{1l}\\C_{2l}\\C_{3l}\\C_{4l}\\C_{5l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_b\\C_c\\C_c\\C_d\\C_d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_a\\C_b\\C_c\\C_d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\mathbb{C}_0=\overset{+}{\mathbb{D}}{}^*\mathbb{C}_P\\ \mathbb{C}_l=\overset{-}{\mathbb{D}}{}^*\mathbb{C}_P\end{array}\quad -(6)$$

＊は転置行列を示す。

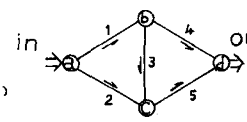


図-3

ここに C_{i0}, C_{il}；i 番目の細管の入口と出口の濃度, $C_a, C_b\cdots$；各節点の濃度, $\mathbb{C}_P$；節点の濃度の列ベクトル

出行列 $\overset{+}{\mathbb{D}}=[\overset{+}{D}{}_e^n]$, 入行列 $\overset{-}{\mathbb{D}}=[\overset{-}{D}{}_e^n]$ 但し $\overset{+}{D}{}_e^n=\begin{cases}1 & \text{節点}n\text{から枝}e\text{へ流れ出るとき}\\0 & \text{しからざるとき}\end{cases}$, $\overset{-}{D}{}_e^n=\begin{cases}1 & \text{節点}n\text{へ枝}e\text{から流れ込むとき}\\0 & \text{しからざるとき}\end{cases}$

4.3 節点における濃度Fluxの連続

境界条件を与えない節点において、濃度Fluxが連続であるとすると、図-3の場合

$$\begin{array}{ll}\text{節点 b} & \left(q_1C_{1l}-k\left.\frac{\partial C_1}{\partial x}\right|_{x=l_1}\right)-\left(q_3C_{30}-k\left.\frac{\partial C_3}{\partial x}\right|_{x=0}\right)-\left(q_4C_{40}-k\left.\frac{\partial C_4}{\partial x}\right|_{x=0}\right)=0\\ \text{節点 c} & \left(q_2C_{2l}-k\left.\frac{\partial C_2}{\partial x}\right|_{x=l_2}\right)+\left(q_3C_{3l}-k\left.\frac{\partial C_3}{\partial x}\right|_{x=l_3}\right)-\left(q_5C_{50}-k\left.\frac{\partial C_5}{\partial x}\right|_{x=0}\right)=0\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\overset{-}{\mathbb{D}}\{\mathbb{Q}\mathbb{C}_l-\mathbb{S}\mathbb{K}(\mathbb{R}_1\mathbb{A}-\mathbb{R}_2\mathbb{B}+\mathbb{R}_4)\}\\ -\overset{+}{\mathbb{D}}\{\mathbb{Q}\mathbb{C}_0-\mathbb{S}\mathbb{K}(\mathbb{P}_1\mathbb{A}-\mathbb{P}_2\mathbb{B})\}=0\end{array}\quad -(7)$$

ここに $\mathbb{Q}, \mathbb{S}, \mathbb{K}$；それぞれ q_i, α_i, k_i を対角成分とする対角行列, $\mathbb{R}_4$；$-\alpha^2\int_{-\overline{U}_iN\Delta t}^{l_i-\overline{U}_iN\Delta t}C_i^N(\xi)\cosh\alpha(l_i-\overline{U}_iN\Delta t-\xi)d\xi$ を成分とする列ベクトルである。

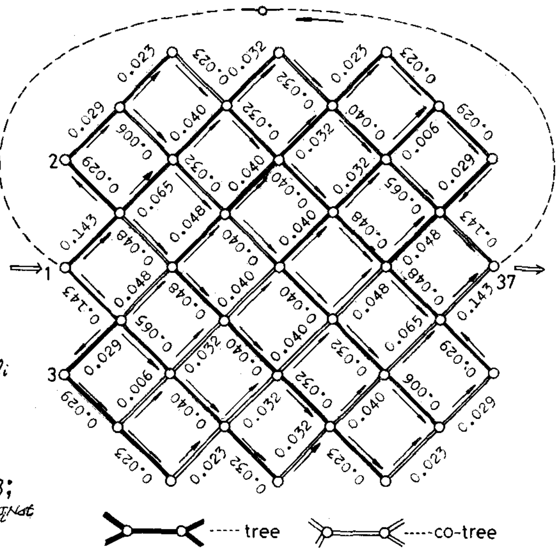


図-2　一様管径, 管長の細管網モデルの流速分布
(破線は木のうちで境界条件を与える枝)
管径 $2a=0.2cm$, 管長 $10.0cm$
節点①と節点②との水頭差 $0.046cm$

考察　以上の(4)～(7)式より、様々な境界条件および初期条件に対して、各時間ステップごとの、各節点の濃度および各細管内の濃度分布を予測する方法が定式化されたが、各節点での分合流および貯留効果や、浸透層を細管結合体でモデル化する場合の管長と管の半径との比が $l/a\doteqdot5$ であること[1)2)]を考えると、G. I. Taylorのみかけの移流分散係数Kに対する適用範囲 $4l/a\gg\overline{U}a/D\gg6.9$ を満たしうるとは言い難い。よって今後は、浸透層を細管結合体でモデル化する場合のKの評価や上述の問題を検討するとともに、計算精度についても考察したい。

参考文献)
1) P.G. Saffman, "A Theory of dispersion in a porous media," Jour. Fluid Mech. PP321～PP349 1959
2) 神野健二「浸透層内の縦方向分散係数について」九大工学集報, 51巻, 1号, 昭53,
3) D.R.F. Harleman and R.R. Rumer, Jour. Fluid Mech. VoL. 16, Part 3, PP385～PP394, 1963
4) Gabor. M. Karadi, Reymond. J. Krizek, Enrique Castillo. J. Appl. Phis, in press. NoV 1972
5) 〃 Jour. Geophisical Reserch PP.558～573, 1973
6) Geffery Taylor "Dispersion of soluble matter in solvent flowing through a tube" Proc. Roy. Soc. A219, PP186～203, 1953
7) Kev , H.K. and M. Chandrasheker, Proc. ASCE, VoL 98. No. HY2, pp345～364, 1972,