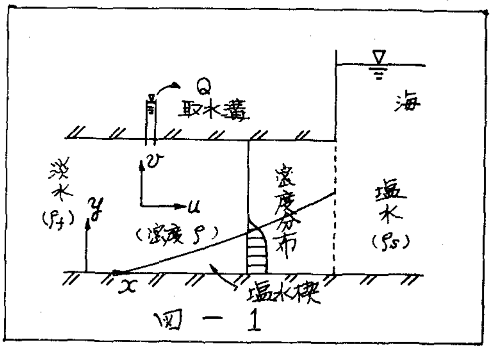
V－18　　地下密度流の数値解について

九州大学　○学生員　林田　大
〃　　正員　上田　年比古
〃　　正員　藤野　和徳

1．まえがき

近年、水資源の不足のため、地下ダム等により地下水の利用が大きな役割を果してきている。本研究においては、海岸線近くの砂層地盤中に塩水が浸入し、塩水楔を形成している地域や、塩水楔の先端より近い距離の地域において、井戸より地下水を取水した場合、取水量の大きさによっては地下水の塩水化が促進される。このため有効な取水量の決定や、流況、塩分濃度分布を求めることが必要となる。ここではモデルとして図－1に示すような、2次元の被圧地下水の二層流を拡散現象をも考慮し、ある点でこの場合取水溝に相当する取水を行った場合の流況や、塩分濃度分布を、重みつき残差法であるGalerkin法を用いて非定常問題を定式化し、数値計算を行ったものである。



図－1

2．解の誘導

基礎方程式

連続の式　$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = -Q\delta(x-x_0)(y-y_0)$　(1)

運動方程式　$u = -(k/\rho_f g)\,\partial P/\partial x$　(2)

$v = -(k/\rho_f g)\cdot(\partial P/\partial y + \rho g)$　(3)

拡散方程式　$\partial \rho/\partial t + u\,\partial \rho/\partial x + v\,\partial\rho/\partial y$

$= D_x \partial^2\rho/\partial x^2 + D_y \partial^2\rho/\partial y^2 - \rho Q\delta(x-x_0)(y-y_0)$　(4)

ここで　u：x方向の浸透流速　v：y方向の浸透流速

Q：溝からの取水量　k：透水係数　ρ：浸透水の密度　ρ_f：淡水密度　ρ_s：塩水密度　P：圧力　g：重力加速度　δ：デルタ関数　D_x：x方向の拡散係数　D_y：y方向の拡散係数である。

(2)、(3)式を(1)式に代入すると次式をうる。

$$\partial^2 P/\partial x^2 + \partial^2 P/\partial y^2 + g\,\partial\rho/\partial y = -(\rho_f g/k)\,Q\,\delta(x-x_0)(y-y_0) \qquad (5)$$

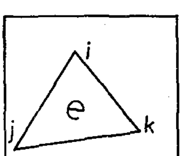
(4)、(5)式を解くにあたり計算領域を三角形要素に分割し、離散化を行う。すなわち圧力P、密度ρに関し次式のようにおく　$P=\sum_{i=1}^{N} P_i f_i$　(6)　$\rho=\sum_{i=1}^{N}\rho_i f_i$　(7)　ここでf_iは展開関数であり、Nは三角形に分割した節点数である。(6)、(7)式を(5)、(4)式に代入し、残差R_I、R_{II}を求める。

$$R_I = \sum_{i=1}^{N}\left[P_i \partial^2 f_i/\partial x^2 + P_i \partial^2 f_i/\partial y^2 + g\rho_i \partial f_i/\partial y + (\rho_f g/k)\,Q\delta(x-x_0)(y-y_0)\right] \qquad (8)$$

$$R_{II} = \sum_{i=1}^{N}\left[\dot{\rho}_i f_i + u_i\rho_i \partial f_i/\partial x + v_i\rho_i\partial f_i/\partial y - D_x\rho_i\partial^2 f_i/\partial x^2 - D_y\rho_i\partial^2 f_i/\partial y^2 + \rho_i f_i Q\delta(x-x_0)(y-y_0)\right] \qquad (9)$$

ここで重みつき残差法であるGalerkin法を用いる。この場合計算領域を離散化しているため積分は各要素ごとの重ね合わせとして表わすことができる。

$\sum_{e=1}^{E}\iint R_I f_j\,dx\,dy = 0$　(10)　　$\sum_{e=1}^{E}\iint R_{II} f_j\,dx\,dy = 0$　(11)

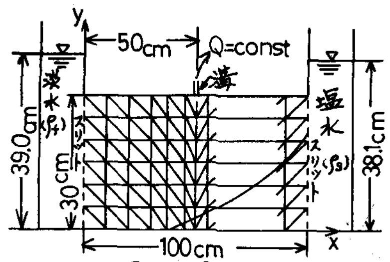


図－2 三角形要素e
(i,j,kは節点)

ここでeは図－2に示す三角形要素を示す記号でEは要素数である。要素の内部では圧力P、密度ρは一次分布を仮定し、要素内の圧力P、密度ρを三つの節点の圧力、密度および座標によって表わすと、$P^e = f_{ie}(x,y)P_i + f_{je}(x,y)P_j + f_{ke}(x,y)P_k$　(12)　$\rho^e = f_{ie}(x,y)\rho_i + f_{je}(x,y)\rho_j + f_{ke}(x,y)\rho_k$　(13)　ここで$f_{ie}(x,y) = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta e$である。ただし$a_i = x_j y_k - x_k y_j$、$b_i = y_j - y_k$、$c_i = x_k - x_j$ …でΔeは面積である。以上により(12)、(13)式を用いて(10)、(11)式を計算すると、次式の行列方程式をうる。　$\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{B}\boldsymbol{\rho} + \mathbb{C}$　(14)

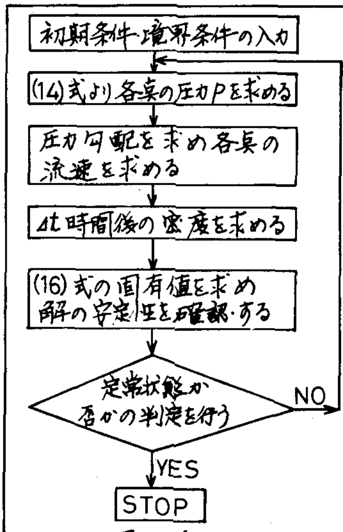
$$\mathbb{F}\dot{\rho} = \mathbb{G}\rho \qquad (15)$$

図-3に示す二層系の流況、密度分布を求める場合、左右のスリットの部分において圧力、密度を既知として境界条件を与える。密度の初期条件としては塩水側のスリットの部分で塩水密度を与え、その他全て淡水密度を与える。ここで(14)式を用いて計算領域の圧力を求める。次に各節点の流速を運動方程式(2)、(3)式を用いて求める。



図－3

次いで(15)式で次のステップの密度を求める。この場合explicit法による差分式を用いると $\rho^{\nu+1}=(\mathbb{I}-\mathbb{F}^{-1}\mathbb{G}\Delta t)\rho^{\nu}$ (16) となる。(16)式の右辺のρ^{ν}に値を代入し次のステップの密度を求める。ここで$\mathbb{I}$は単位行列であり、Δtは時間ステップである。以上の計算手順を図-4に示す図で示す。

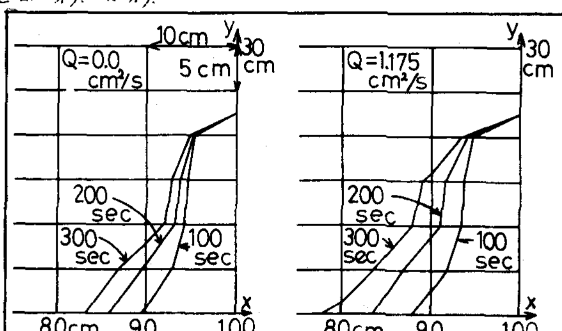


図－4

3. 解析結果と考察

計算領域における非定常拡散の50%の等濃度線を図-5、6に示す。図-6は図-3のA部領域の中央点において取水を行った場合で取水量$Q=1.175\,cm^2/sec$であり、図-5は取水量$Q=0$である。計算領域はx方向に100cm、y方向に30cmの領域を仮定し、要素数144、節点数91、要素としては三節点三角形要素を用い、溝の周辺においては要素を細かく組んでいる。淡水、塩水の水頭はそれぞれ39.0cm、38.1cmとし、拡散係数は縦、横方向ともに$0.05\,cm^2/sec$とし、透水係数$k=3.42\,cm/sec$、空げき率$\lambda=0.4$で時間ステップは$\Delta t=2.0\,sec$を用いている。図-5、6より、取水を行った場合の方が塩水の浸入速度が早いという結果をえており、基礎方程式を離散化し、Galerkin法による定式化によっての計算は可能であると考えられる。

問題点としては、非定常の解析において離散化を行った場合、時間ステップのとり方がある。先の計算においてΔtを2.0秒、4.0秒、10.0秒にとって(16)式の$(\mathbb{I}-\mathbb{F}^{-1}\mathbb{G}\Delta t)$の固有値を計算すると、固有値の実部の最大値は$\Delta t=2.0$秒では0から1の範囲にあり解は収束の条件を満たしている。また$\Delta t=4.0$、10.0秒では1.020、1.059となり、時間ステップの値により解の発散が生じる。この固有値は拡散係数や流速、また要素の形状により変化すると考えられる。今後非定常問題をとり扱う場合、解の安定条件について検討しなければならないと思う。



図－5 50%等濃度線（取水量Q=0の場合）

図－6 50%等濃度線（取水量$Q=1.175\,cm^2/s$の場合）

4. むすび

地下密度流における拡散問題の定式化はえられた。今後は、時間ステップと方程式に含まれる物理量との関係を安定性の問題の上で求め、実際現象にそう計算を行ない、また実験を行って検討を行ないたいと考えている。

参考文献

神野・楢原・上田：Galerkin法による地下水拡散について　西部支部研究発表会講演集　昭和52.2