

福岡大学 理学部 正員 ○大西和栄  
 “ 工学部 “ 花嶋正孝  
 “ “ “ 黒木健実

1. まえがき 地下汚染を考える場合に、不飽和土中の浸透問題と汚染物質の拡散問題を連立させて解くことが必要となる。浸透問題については、これまでにいくつかの差分解<sup>1,2)</sup>や有限要素解<sup>3,4)</sup>が種々の境界条件のもとで求められているが、拡散問題をも含めて主題としたものについては発表されていない。

本報では、2次元の不飽和土中非定常浸透拡散問題の近似解法として、有限要素法による解析を考察し、すでに発表されている結果と比較した。

2. 基礎方程式 2次元 $xz$ -平面( $z$ は重力方向)においてDARCY FLUX  $q = (q_x, q_z)$  は

$$q_x = -D_x(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad q_z = -D_z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \quad \dots \dots (1)$$

ここに  $\theta$ : VOLUMETRIC SOIL WATER CONTENT,  $(D_x, D_z)$ : SOIL WATER DIFFUSIVITIES,  $K$ : HYDRAULIC CONDUCTIVITY を表す。時間変数を $t$ として、水の湧源が解析対象となる領域 $\Omega$ 内には存在しないものとする。Mass BALANCE は $\theta$ について

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots (2)$$

と書かれる。 $\Omega$ は有界とし、その境界 $\Gamma$ 上で次の3種の境界条件を考える。

i.  $\theta = \theta_B$  (GIVEN) ON  $\Gamma_1^0$ , ii.  $q_n = 0$  (このとき $K=0$ ) ON  $\Gamma_2^0$ , iii.  $q_n = R(t)$  ON  $\Gamma_3^0$  ..... (3. a-c)  
 但し、 $q_n$ は $q$ の $\Gamma$ 上外向法線方向成分、 $R$ : RAIN INTENSITY を表す。以上が不飽和土中の浸透水に関する基礎方程式である。

次に同じ領域と同じ座標系に対して、MASS FLUX  $J = (J_x, J_z)$  は

$$J_x = -\hat{D}_x(C) \frac{\partial C}{\partial x} + v_x C, \quad J_z = -\hat{D}_z(C) \frac{\partial C}{\partial z} + v_z C \quad \dots \dots (4)$$

ここに $C$ : 土中水における汚染物質の濃度,  $(\hat{D}_x, \hat{D}_z)$ : SOLUTE DISPERSION COEFFICIENTS であって PORE WATER VELOCITIES  $(v_x, v_z)$  に依存し、 $v_x = q_x/\theta$ ,  $v_z = q_z/\theta$  で与えられる。今、単位体積の SOIL MATRIX に吸着する溶質の量を  $S = S(C)$  とおくと、 $C$  についての MASS BALANCE は

$$\frac{\partial}{\partial t} (S + \theta C) + \frac{\partial}{\partial x} (\theta J_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\theta J_z) = 0 \quad \dots \dots (5)$$

と書かれる。境界条件として3種を考える。

IV.  $C = C_B$  (GIVEN) ON  $\Gamma_1^C$ , V.  $J_n = 0$  (このとき $v_n=0$ ) ON  $\Gamma_2^C$ , VI.  $J_n = P_B$  ON  $\Gamma_3^C$  ..... (6. a-c)

但し、 $J_n$ は $J$ の $\Gamma$ 上外向法線方向成分、 $P_B$ は $\Gamma$ 上からの供給量を表す。式(4)-(6)が不飽和土中の物質拡散に関する基礎方程式である。以上の式(1)-(6)を無次元化しても形式的には全く同一の式へ変換されるので、以下では式(1)-(6)はすべてに無次元化されているものと見做すことにする。

3. 変分原理と有限要素法による近似 境界 $\Gamma_1^0, \Gamma_1^C$ 上で $\delta\theta=0, \delta C=0$ となるような連続な変分 $\delta\theta, \delta C$ に対して式(2), (5)から

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta\theta dV + \int_{\Omega} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \delta\theta dV = 0, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (S + \theta C) \delta C dV + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta J_i) \delta C dV = 0$$

を得る。但し、 $i=1,2$ は $x, z$ 成分を表し、 $n$ についての和をとるものと規約する。第2項を部分積分して境界条件(3), (6)を考慮に入れると

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta\theta dV = \int_{\Omega} \theta_i \frac{\partial \delta\theta}{\partial x_i} dV - \int_{\Gamma_3^0} R \delta\theta dA, \quad \dots \dots (7.a)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial S}{\partial C} + \theta \right) \frac{\partial \delta C}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} C \delta C dV = \int_{\Omega} \theta J_i \frac{\partial \delta C}{\partial x_i} dV - \int_{\Gamma_3^C} P_B \delta C dA \quad \dots \dots (7.b)$$

となる。さて、 $\theta$ と $C$ は $\Omega$ 上で連続であると仮定し $\Omega$ を三角形要素 $e$ に分割し、各 $e$ 上で $\theta^e = [N(x, z)] \{ \theta \}_e$ ,

$C \in [N][C]_e$  と線形補間すると、式(7)より各  $e$  について

$$[H(\Theta)]\{\Theta\}_e + [M]\frac{d}{dt}\{\Theta\}_e = \{K(\Theta)\}_e - \{R(t)\}_e \quad \dots\dots (8.a)$$

$$[G(\Theta, U)]\{C\}_e + \left(\frac{dS}{dC} + \Theta\right)_e [M]\frac{d}{dt}\{C\}_e + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_e [M]\{C\}_e = \{L\}\{C\}_e - \{F\}_e \quad \dots\dots (8.b)$$

なる形の式を得る。ここに  $[H]$ ,  $[G]$ ,  $[M]$  は正値対称行列であり、記号  $\{\}_e$  は要素  $e$  内では一定と仮定したときの関数値を意味する。

式(8)を CRANK-NICHOLSON SCHEME を使って時間方向に離散化すると、式(8.a)については

$$[H(\Theta_{m+1/2}, U_{m+1/2})]\frac{\{\Theta_{m+1}\} + \{\Theta_m\}}{2} + [M]\frac{\{\Theta_{m+1}\} - \{\Theta_m\}}{\Delta t} = \{K(\Theta_{m+1/2})\} - \{R(t_{m+1/2})\} \quad \dots\dots (9)$$

となり式(8.b)についても同様にする。但し、 $t = t_{m+1/2}$  における値は  $t_m$  と  $t_{m+1}$  との値の平均である。式(9)は  $\{\Theta_{m+1}\}$ ,  $\{C_{m+1}\}$  について非線形であるから収束するまで反復する。

#### 4. 計算結果と比較

- (A) SELIM *et al.*<sup>5,6)</sup> の  $D(\theta) = (204.15\theta^2 - 109.38\theta + 15.63) \times 10^{-66.76\theta^2 + 50.0\theta - 10.3}$ ,  $K(\theta) = 10^{-66.76\theta^2 + 50.0\theta - 10.3}$ ,  $Z=0$  において  $R(t) = 0.02\%$  ( $0 \leq t \leq 3.75h$ ) か  $t = 0$  ( $3.75 < t$ ),  $\hat{D}(U) = 6.66 \times 10^{-4} + 3.45 \times 10^{-4} \log|U|$ ,  $S = 0.22 \times 10^{-6} C$ ,  $Z=0$  において  $C_0 = 20$  PPM ( $0 \leq t \leq 0.5h$ ) か  $J_n = 0$  ( $0.5 < t$ ) について発表した1次元問題の差分解と、有限要素法の妥当性を調べる目的で2次元問題に改めて解いた有限要素解を図1と図2に示す。差分解と有限要素解は良い一致を示している。節点数  $1/6$  で連立一次方程式は PACKED FORM による GAUSS の消去法を使い、反復回数は2回 ( $\Delta t = 1.22 \times 10^{-4}$ ) で収束した。
- (B) ZYVOLOSKI *et al.*<sup>3)</sup> の  $D(\theta) = 3.33 \times 10^{-5} \text{Exp}(29.34\theta) \text{ cm}^2/\text{min}$ ,  $K(\theta) = 3.33 \times 10^{-13} \text{Exp}(54.11\theta) \text{ cm}^2/\text{min}$  について発表した2次元浸透問題の差分解並びに有限要素解の比較を図3に示す。更に  $\hat{D}_i = 0.0980 + 0.0575 \log|u_i|$ ,  $S = 0.22 C$  に対しての拡散問題の有限要素解を図4に示す。

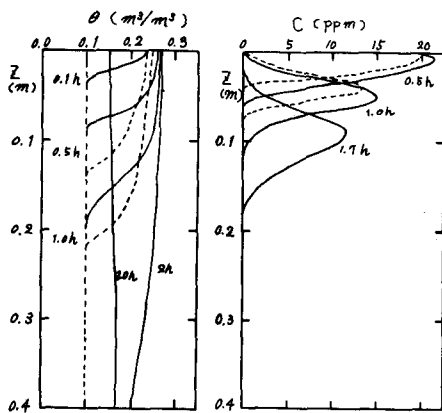


図1.  $\theta$  の差分解(点線)と有限要素解(実線)

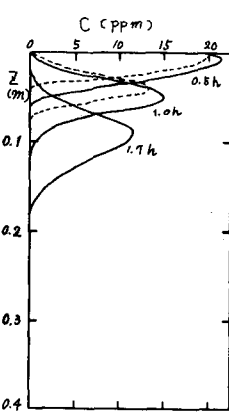


図2.  $C$  の差分解(点線)と有限要素解(実線)

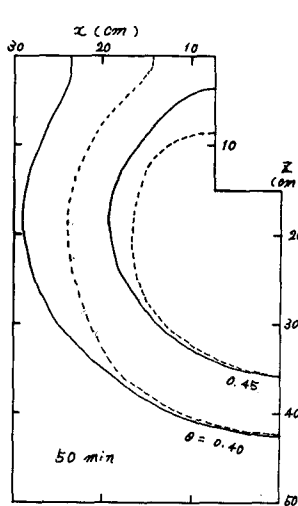


図3. 差分解の等  $\theta$  線(点線)と有限要素解の等  $\theta$  線(実線)

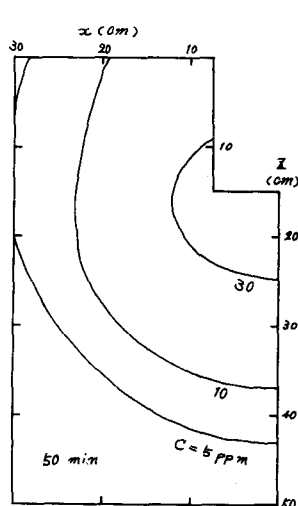


図4. 有限要素解の等  $C$  線

5. おわりに 2次元不飽和土中の非定常浸透拡散問題を有限要素法によって解いた。計算結果は差分解と良い一致を示した。本報は地下汚染問題を取り扱う場合の予測に役立てることができよう。

- 1) Rubin, J. Soil Sci. Soc. Amer. Proc. Vol. 32, No. 5 (1968) 2) Selim, H. M. *et al.*, Soil Sci. Soc. Amer. Proc. Vol. 37, No. 4 (1973) 3) Zyvoloski, G. *et al.*, Soil Science, Vol. 122, No. 2 (1976) 4) 赤井若一他, 土木学会論文報告集, No. 264 (1977) 5) Selim, H. M. *et al.*, Soil Science, Vol. 121, No. 3 (1976) 6) Elzeftawy, A. *et al.*, Soil Science, Vol. 122, No. 5 (1976)