

福岡大学 正員 〇黒木健実
福岡大学 秋根恵美子

まえがき 浸透問題の数値解析には種々の困難が伴う。その1つに微分方程式を差分化するときの打ち切り誤差と差分方程式を計算するときに生ずる丸め誤差の評価がある。非定常不飽和浸透流の支配方程式は強い非線形性を示すので誤差を評価して、安定条件を設けることが困難である。したがって適切な解を求めるにはいさおいコンピュータによる数値実験が必要となる。

ここでは1次元浸透問題における差分法として中央差分による陽な解法とCrank-Nicolson法と予測子-修正子法の2つの陰な解法を取りあげ、係数の非線形性を変えて安定性と収束性について検討する。

支配方程式

図1に示すように一様な不飽和層が表面から水の供給を受ける場合の支配方程式は θ = 含水率, K = 透水係数, D = 水分拡散係数とおけば次のように表わされる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} - K \right) \quad (1)$$

展開して $D' = dD/d\theta$, $K' = dK/d\theta$ とおけば

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + (D' \frac{\partial \theta}{\partial z} - K') \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2)$$

差分方程式¹⁾

整数 n , i と時間刻み Δt , 空間分割 Δz とを使って $t_n = n\Delta t$, $Z_i = i\Delta z$

$\theta_i^n = \theta(Z_i, t_n)$ とおく。陽形式の差分方程式は時間と空間方向の中央差分と

$\theta_i^n = (\theta_i^{n+1} + \theta_i^{n-1})/2$ とを組み合わせたものである。

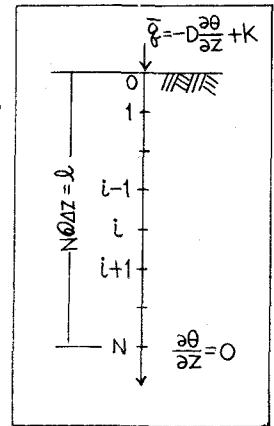


図1

式(2)の陽形式 EXP	$(1+4r_i^n)\theta_i^{n+1} + 4r_i^n(\theta_{i+1}^n - \theta_i^n + \theta_{i-1}^n) + 4S_i^n(\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n)$
式(1)の Crank-Nicolson CN1	$-r_{i+1/2}^{n+1}\theta_{i-1}^{n+1} + (1+r_{i-1/2}^{n+1}+r_{i+1/2}^{n+1})\theta_i^{n+1} - r_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i+1}^{n+1} = r_{i-1/2}^n\theta_{i-1}^n + (1-r_{i-1/2}^n-r_{i+1/2}^n)\theta_i^n + r_{i+1/2}^n\theta_{i+1}^n - (V_i^n + V_i^{n+1})$
式(2)の Crank-Nicolson CN2	$(S_i^{n+1} - r_i^{n+1})\theta_{i-1}^{n+1} + (1+2r_i^{n+1})\theta_i^{n+1} - (S_i^{n+1} + r_i^{n+1})\theta_{i+1}^{n+1} = -(S_i^n - r_i^n)\theta_{i-1}^n + (1-2r_i^n)\theta_i^n + (S_i^n + r_i^n)\theta_{i+1}^n$
式(1)の 予測子-修正子 PC1	$-r_{i+1/2}^n\theta_{i-1}^{n+1/2} + (1+r_{i-1/2}^n+r_{i+1/2}^n)\theta_i^{n+1/2} - r_{i-1/2}^n\theta_{i+1}^{n+1/2} = \theta_i^n - V_i^n$ $-r_{i-1/2}^{n+1/2}\theta_{i-1}^{n+1} + (1+r_{i-1/2}^{n+1/2}+r_{i+1/2}^{n+1/2})\theta_i^{n+1} - r_{i+1/2}^{n+1/2}\theta_{i+1}^{n+1} = r_{i-1/2}^{n+1/2}\theta_{i-1}^n + (1-r_{i-1/2}^{n+1/2}-r_{i+1/2}^{n+1/2})\theta_i^n + r_{i+1/2}^{n+1/2}\theta_{i+1}^n - 2V_i^{n+1/2}$
式(2)の 予測子-修正子 PC2	$-r_i^n\theta_{i-1}^{n+1/2} + (1+2r_i^n)\theta_i^{n+1/2} - r_i^n\theta_{i+1}^{n+1/2} = \theta_i^n + S_i^n(\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n)$ $-r_i^{n+1/2}\theta_{i-1}^{n+1} + (1+2r_i^{n+1/2})\theta_i^{n+1} - r_i^{n+1/2}\theta_{i+1}^{n+1} = r_i^{n+1/2}\theta_{i-1}^n + (1-2r_i^{n+1/2})\theta_i^n + r_i^{n+1/2}\theta_{i+1}^n + 2S_i^{n+1/2}(\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n)$
$r_i^n = \Delta t D_i^n / (2\Delta z^2)$, $S_i^n = \Delta t \{ D_i^n (\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n) / (2\Delta z) - K_i^n \} / (4\Delta z)$ $r_{i+1/2}^n = (r_i^n + r_{i+1}^n) / 2$, $V_i^n = \Delta t (K_{i+1}^n - K_{i-1}^n) / (4\Delta z)$	

数値計算

表1に示す3種類の特性を仮定して深さ100 cmまでの解析を行なった。ここに h は全水頭で $D-K$ 関係は次のようにとった。
 $D_i = -K_i dh/d\theta$, $i=1, 2, 3$

表面の供給量は $\bar{q} = 2.08 \text{ cm/h}$ とした。初期値 $\theta(z, 0)$ を0.1と0.2, 分割数 N を5, 10, 20, 時間刻み Δt を0.1, 0.01, 0.001と変えて1時間後の結果を比較した。

表1 水分保持特性

$dh/d\theta$	$-20413.911\theta^2 + 10938.446\theta - 1563.395$	
K_1	$10^{0.2}$	
K_2	$10.566\theta - 1.0565$	$\theta \leq 0.25$
	$109.662\theta - 25.8306$	$0.25 < \theta$
K_3	10^f $f = 485.44\theta^3 - 449.27\theta^2 + 141.62\theta - 14.544$	

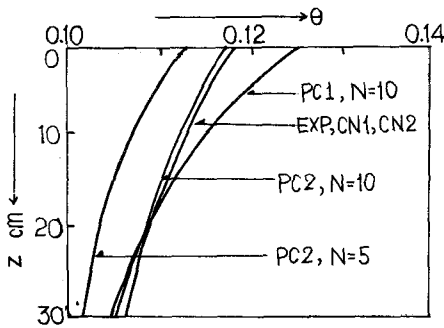


図2 $\theta(z, 0)=0.1$, $K=K_1$

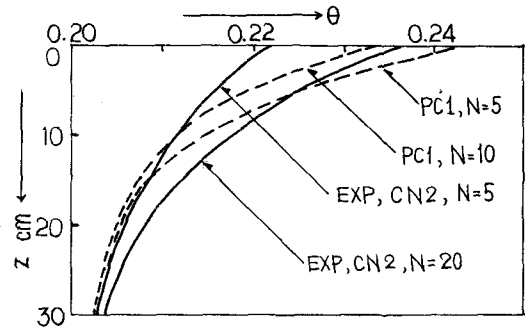


図3 $\theta(z, 0)=0.2$, $K=K_1$

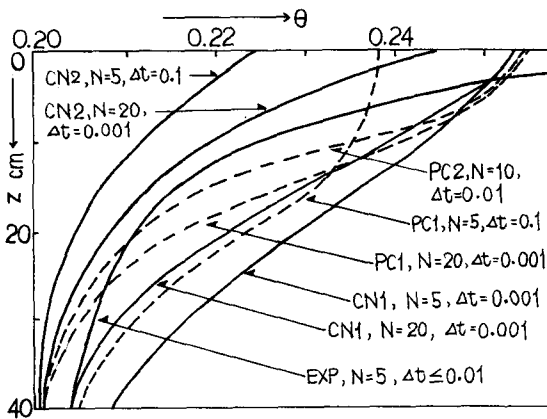


図4 $\theta(z, 0)=0.2$, $K=K_2$

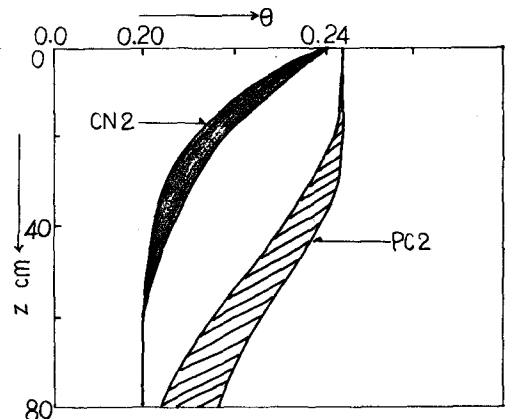


図5 $\theta(z, 0)=0.2$, $K=K_3$

初期値0.1, $K=K_1$ の場合(図2)陽な解法とCrank-Nicolson法では $\Delta t=0.1$ hで収束している。 $0.001 \leq \Delta t < 0.1$ の範囲で N と Δt の組み合わせを替えても1%以内の差しか現れない。予測子-修正子法の2でも与えられた N に対して Δt を0.1, 0.01, 0.001と小さくしても結果はほとんど変化していない。予測子-修正子法の1が $N=20$, $\Delta t=0.1, 0.01, 0.001$ で発散したことが注目される。初期値0.2, $K=K_1$ の場合(図3)陽な解法はCrank-Nicolson法の2と良く一致している。2者共に Δt の影響が現れている。初期値0.2, $K=K_2$ の場合(図4)陽な解法には $N=5$, $\Delta t \leq 0.01$ 以外で振動が起きている。予測子-修正子法の1は $N=10$, $\Delta t=0.1$ と $N=20$, $\Delta t=0.1$ の各組み合わせで発散した。初期値0.2, $K=K_3$ の場合(図5) $N=5, 10$ ではCrank-Nicolson法の2と予測子-修正子法の2だけが安定で陽な解法, Crank-Nicolson法の1, 予測子-修正子法の1は発散した。図5は θ の上限下限を示している。

おまけ 総合的に判断すると式(2)のCrank-Nicolson法が優れている。

1) Ames, W.F., Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2nd edit., Academic Press, 1977.