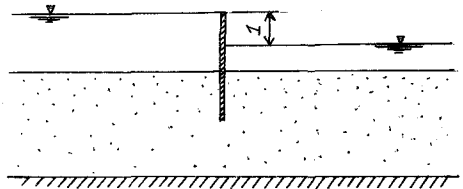


1. まえがき

現在透流解析の方法としては、有限要素法、差分法等の数値解析法と複素関数論における等角写像による方法等が利用されているが、何れも実用に当っては大型の電算機や相当の労力算を必要とし、手軽に利用できるとは言えない。そこで矢板の下をまわる透流をとり上げて、座標値を与えて任意の点のポテンシャルを計算する実用的な公式を導くために、矢板上のポテンシャルとして近似的に流体力学における公式を仮定して、境界値問題として解くことを試み、例題について従来の解析法による結果との比較を行った。

2. 無限帯状地盤について

図-1に示すような矢板のまわりを流れる透流現象について考える。流線網の形状は左右対称であるから、右半分について半無限帯状領域におけるポテンシャル問題として解析する。境界条件及び記号は図中に示されている。ポテンシャルを u としてラプラスの方程式を解く。即ち



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq x < \infty, 0 \leq y < b)$$

変数分離の原理によって、 $u = X(x)Y(y)$ と仮定すると、

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = \omega^2$$

といて、下記の二つの方程式を解くことになる。

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \omega^2 Y = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \omega^2 X = 0$$

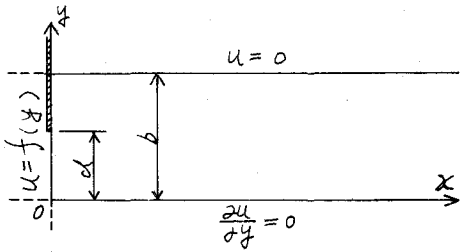


図-1

夫々解は

$$X = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}, \quad Y = C_3 \cos \omega y + C_4 \sin \omega y$$

$x \rightarrow +\infty$ で u は有限であるから、 $X = C_2 e^{-\omega x}$ 、又 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$ の条件より、 $C_4 = 0$ 、即ち A を任意定数とすると、 $u = e^{-\omega x} A \cos \omega y$ 、となる。又 $u(x, b) = 0$ の条件より、 $\omega = \frac{2n-1}{2b} \pi$ 、 $(n=1, 2, 3, \dots)$ 、したがって一般解は、

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2n-1}{2b} \pi x} A_n \cos \frac{2n-1}{2b} \pi y, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots (1)$$

$x=0$ において $u(0, y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2n-1}{2b} \pi y$

したがって $A_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(\xi) \cos \frac{2n-1}{2b} \pi \xi d\xi, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots (2)$

$f(y)$ については、 $0 \leq y \leq \alpha$ においては左右対称性より $f(y) = p (=0.5)$ 、 $\alpha < y \leq b$ においては、近似的に平板のまわりの流れにおける板上のポテンシャルと一致するものとする。すなわち流体力学において良く知られた公式によって、この場合には逆三角関数として表現される。

$$f(y) = p \left(1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{b-y}{b-a} \right) \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) \text{式を代入して } A_n = \frac{4P}{(2n-1)\pi} - \frac{4P}{\pi b} \int_a^b \cos^{-1} \frac{b-\xi}{b-a} \cos \frac{2n-1}{2b} \pi \xi d\xi \quad \text{--- (4)}$$

(4)式を(1)式に代入すれば任意の点の速度ポテンシャルが求まる。(4)式のオス項はシンプソンの法則による数値積分を行った。解析例を図-2に示す。28ヶの格子点について計算したもので、等角写像におけるシュヴァルツクリストッフ変換を利用した方法¹⁾による等ポテンシャル線と比較してある。数式的特性として $x=0$ における値は収束が悪く2けたまでしか得られなかった。

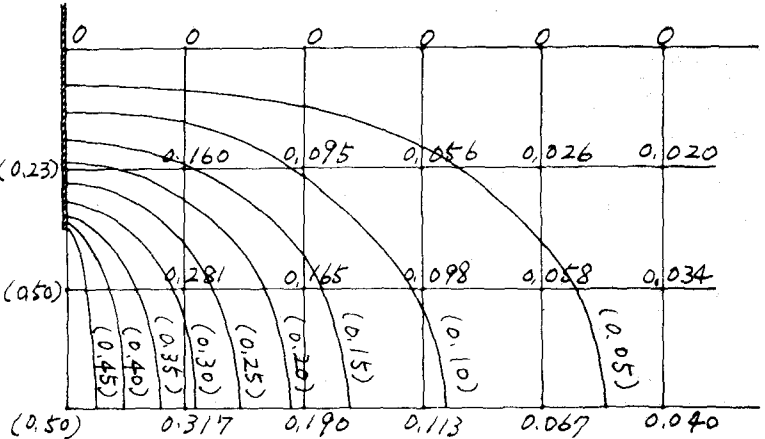


図-2

2. 有限地盤について

長方形領域 ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) におけるポテンシャル問題として、無限地盤におけると同様にして、ラプラスの方程式を解く。一般解は

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh \frac{2n-1}{2b} \pi (a-x) \sin \frac{2n-1}{2b} \pi (b-y), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{--- (5)}$$

定数 A_n は
$$A_n = \frac{1}{\cosh \frac{2n-1}{2b} \pi a} \left\{ \frac{4P}{(2n-1)\pi} - \frac{4P}{\pi b} \int_a^b \cos^{-1} \frac{b-\xi}{b-a} \sin \frac{2n-1}{2b} \pi (b-\xi) d\xi \right\} \quad \text{--- (6)}$$

解析例を図-3に示す。

この例は各格子点について有限要素解析の結果と比較したものである。上の数値が有限要素解析による値で、下の数値が(5)式によって計算したものである。有限要素解析では3けた目の数値がほとんど変化しなくなる迄(即ち $2 \times 13 = 273$ 節点、480要素)まで分割が行われている。

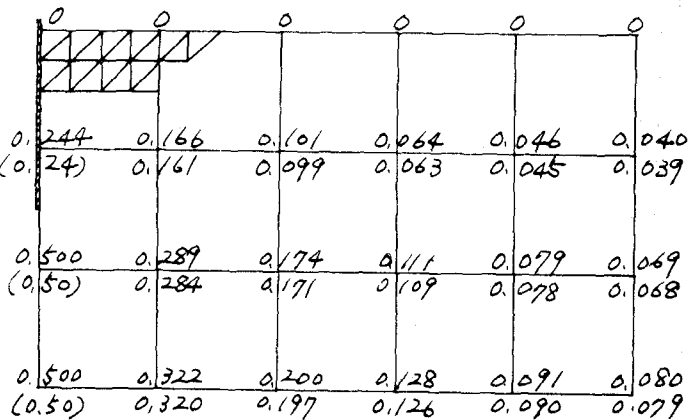


図-3

引用文献

- 1) P.Y.P. Kochina
; Theory of Ground
Water Movement