V－8　　有限要素法による非定常波動解析について (1)
—解析方法—

熊本大学　工学部　正会員　○滝川　清
熊本大学　工学部　正会員　　田渕　幹修

1. はじめに　表面波のポテンシャル理論による基本式に直接、有限要素法を適用して、任意の海底形状および境界領域における非定常な波の運動を有限振幅性を含めて解析を行なったので、その解析手法について紹介する。

2. 基礎方程式　図－1に示す様な2次元の領域での流体の運動を考える。解析領域$V(\eta)$は表面変動量$\eta(x,t)$の関数である。S_1は自由表面境界、S_3は流体中に設けた仮想の左右両境界、またS_2は海底および構造物等の不透過な境界を意味する。座標系は静水面上にx軸をとり、これと垂直上向きにy軸をとる。流体は速度ポテンシャル$\phi(x,y,t)$を有するものとすると運動の支配方程式は領域$V(\eta)$内で

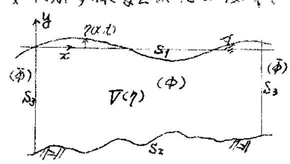

図-1　解析領域

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 = 0 \qquad \cdots(1)$$

一方、境界条件は、自由表面S_1上で

$$\partial\phi/\partial t + \frac{1}{2}\{(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2\} + g\eta = 0 \qquad \cdots(2)$$

$$\partial\phi/\partial n = n_y\,\partial\eta/\partial t \qquad \cdots(3)$$

を満足しなければならない。ここに、$\eta(x,t)$は、x軸からの自由表面までの変動量を表し、nは境界外向法線方向、n_yは、nのy軸方向余弦である。S_2境界では、

$$\partial\phi/\partial n = 0 \qquad \cdots(4)$$

また、左右両境界S_3面での$\partial\phi/\partial n$の条件として、

$$\partial\phi/\partial n = \partial\Phi/\partial n \qquad \cdots(5)$$

とする。ここに、Φは解析領域外部の速度ポテンシャルを意味する。Φの表示およびS_3での境界処理については、本論(5.境界処理)の節で説明している。

3. 変分原理　この境界値問題は、ある時刻tに注目するとき、次の汎関数を停留にする変分問題と等価である。

$$\chi = \frac{1}{2}\iint_{V(\eta)}\{(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2\}dxdy + \frac{g}{2}\int_{S_1}\eta^2 dx + \int_{S_1}(\partial\phi/\partial t)\eta\, dx$$
$$- \int_{S_1}(n_y\,\partial\eta/\partial t)\phi\, dS_1 - \int_{S_3}(\partial\Phi/\partial n)\phi\, dS_3 \qquad \cdots(6)$$

この汎関数は、Luke[1]が考案した汎関数と等価であって、変分を受ける独立量はϕとηである。なお変分を取るに際して汎関数中の$\partial\phi/\partial t$、$\partial\eta/\partial t$および$\partial\Phi/\partial n$は定数であると見なされる。式(6)のϕ、ηに関する第1変分をとり、結果のみを示すと次式のようである。

$$\delta\chi = -\iint_{V(\eta)}(\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2)\delta\phi\, dxdy + \int_{S_1}(\partial\phi/\partial n - n_y\,\partial\eta/\partial t)\delta\phi\, dS_1$$
$$+ \int_{S_1}[\partial\phi/\partial t + \frac{1}{2}\{(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2\} + g\eta]\delta\eta\, dx$$
$$+ \int_{S_2}\partial\phi/\partial n\,\delta\phi\, dS_2 + \int_{S_3}(\partial\phi/\partial n - \partial\Phi/\partial n)\delta\phi\, dS_3 \qquad \cdots(7)$$

すなわち、式(6)で表わされる汎関数を停留にする条件として、式(1)および境界条件式(2)、(3)、(4)、(5)が同時に得られる。

4. 有限要素法による定式化　解析領域Vを三角形要素群に分割して、図-2に示す様な1つの要素i, j, m内の$\phi(x,y,t)$をその節点値$\{\phi\}^T = [\phi_i, \phi_j, \phi_m]$で表現すると、

$$\phi = [N_i, N_j, N_m]\{\phi\} = [N]\{\phi\} \qquad \cdots(8)$$

ただし、

$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta$
$N_j = (a_j + b_j x + c_j y)/2\Delta$
$N_m = (a_m + b_m x + c_m y)/2\Delta$

$$\left.\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned}\right\}\ \text{回転順列}$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

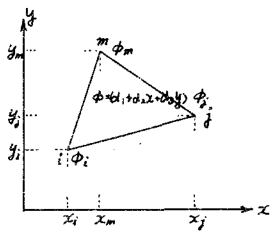

図-2　三角形要素

この式(8)を用いると、要素内の$\partial\phi/\partial x$、$\partial\phi/\partial y$は次式となる。

$$\partial\phi/\partial x = [\partial N/\partial x]\{\phi\} = \frac{1}{2\Delta}[b_i, b_j, b_m]\{\phi\} \qquad \cdots(9)$$

$$\partial\phi/\partial y = [\partial N/\partial y]\{\phi\} = \frac{1}{2\Delta}[c_i, c_j, c_m]\{\phi\} \qquad \cdots(10)$$

一方、$\eta(x,t)$は自由表面上節点間でxの一次式で近似する。

$$\eta = [L_i, L_j]\{\eta\} = [L]\{\eta\} \qquad \cdots(11)$$

ただし、
$\{\eta\}^T = [\eta_i, \eta_j]$
$L_i = \frac{1}{\ell}(x_j - x)$, $L_j = \frac{1}{\ell}(x - x_i)$
ℓ：表面節点間きょりのx軸への写影長

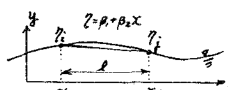

図-3　自由表面要素

ところで、解析領域Vは、独立な変関数ηの関数であって自由表面に関係する要素に、その未知量が入ってきてしまい非線形な多元連立方程式を解かねばならない。しかるに、ここでは、式(6)で定義される変分原理を用いるために

Newton-Raphason 法[2] を用いる。

いま、時刻 $t=t_0$ と $t=t_0+\Delta t$ における ϕ, η をそれぞれ ϕ_0, η_0 および ϕ, η と書き、Δt 间の増分を $d\phi$, $d\eta$ とすると

$$\phi=\phi_0+d\phi \quad , \quad \eta=\eta_0+d\eta \qquad \cdots(12)$$

が成立する。したがって、各要素での関係式(8)～(11)の $\{\phi\}$, $\{\eta\}$ は式(12)を用いて書きなおされる。

さらに、自由表面に関係する要素について、例へば図-4の様に i, j 2節点が表面にある三角形要素について、表面が $d\eta_i$, $d\eta_m$ だけ変動すると、三角形 i, j, m の面積は、

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i^0+d\eta_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m+d\eta_m\end{vmatrix}$$

$$=\Delta_0+\frac{1}{2}[c_i, c_j, c_m]\{d\eta\}$$

$$=\Delta_0+\mathbb{P}^T\{d\eta\} \qquad \cdots(13)$$

ここで

Δ_0 は $t-\Delta t$ での面積

$\{d\eta\}^T=[d\eta_i, 0, d\eta_m]$

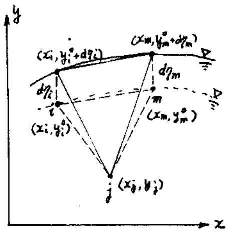

図-4 自由表面に関係する三角形要素

となる。そこでこれを考慮して式(9),(10)を書きかえる。

ただし、$d\phi$, $d\eta$ の2次以上の項は無視している。

$$\partial\phi/\partial x=[\mathbb{A}_0+d\eta^T\mathbb{A}_1]\{\phi_0+d\phi\} \qquad \cdots(14)$$

$$\partial\phi/\partial y=[\mathbb{B}_0+d\eta^T\mathbb{B}_1]\{\phi_0+d\phi\} \qquad \cdots(15)$$

ただし、$\mathbb{A}_0^T=\frac{1}{2\Delta_0}[b_i^0, b_j^0, b_m^0] \quad , \quad \mathbb{B}_0^T=\frac{1}{2\Delta_0}[c_i, c_j, c_m]$

$$\mathbb{A}_1=\frac{1}{2\Delta_0}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2\Delta_0}b_i^0c_i, & 1-\frac{1}{2\Delta_0}b_i^0c_j, & -1-\frac{1}{2\Delta_0}b_i^0c_m\\ -1-\frac{1}{2\Delta_0}b_j^0c_i, & -\frac{1}{2\Delta_0}b_j^0c_j, & 1-\frac{1}{2\Delta_0}b_j^0c_m\\ -1-\frac{1}{2\Delta_0}b_m^0c_i, & -1-\frac{1}{2\Delta_0}b_m^0c_j, & -\frac{1}{2\Delta_0}b_m^0c_m\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}_1=\frac{-1}{(2\Delta_0)^2}\begin{bmatrix}c_ic_i, & c_ic_j, & c_ic_m\\ c_jc_i, & c_jc_j, & c_jc_m\\ c_mc_i, & c_mc_j, & c_mc_m\end{bmatrix}$$

$$b_i^0=y_j-y_m^0 \ , \ b_j^0=y_m^0-y_i^0 \ , \ b_m^0=y_i^0-y_j$$

また、要素の i 点のみが自由表面上にある場合は、以上の諸式において、$d\eta_m$ を 0 とすればよい。

以上の関係式を式(6)で与えられる汎関数に代入して $d\phi$, $d\eta$ に関する変分をとり $\delta\mathcal{L}$ を求める。その得られた $\delta\mathcal{L}$ より汎関数の停留条件として、$d\phi$, $d\eta$ に関する2組の連立方程式が得られ次式のようになる。

$$\sum_V\left[\{(\mathbb{A}_0^T\phi_0\mathbb{I}+\mathbb{A}_0\phi_0^T)\mathbb{A}_1+(\mathbb{B}_0^T\phi_0\mathbb{I}+\mathbb{B}_0\phi_0^T)\mathbb{B}_1\}\Delta_0+(\mathbb{A}_0\mathbb{A}_0^T+\mathbb{B}_0\mathbb{B}_0^T)\phi_0\mathbb{P}^T\right]\{d\eta\}$$

$$+\sum_V(\mathbb{A}_0\mathbb{A}_0^T+\mathbb{B}_0\mathbb{B}_0^T)\Delta_0\{d\phi\}=-\sum_V(\mathbb{A}_0\mathbb{A}_0^T+\mathbb{B}_0\mathbb{B}_0^T)\phi_0\Delta_0+\sum_{S_1}\mathbb{L}\{\partial\eta/\partial t\}+\sum_{S_3}\mathbb{S}\{\partial\bar{\phi}/\partial n\} \qquad \cdots(16)$$

$$\Big\{\sum_V\mathbb{P}\phi_0^T(\mathbb{A}_0\phi_0^T\mathbb{A}_1+\mathbb{B}_0\phi_0^T\mathbb{B}_1)+\sum_{S_1}g\mathbb{L}\Big\}\{d\eta\}+\sum_V\mathbb{P}\phi_0^T(\mathbb{A}_0\mathbb{A}_0^T+\mathbb{B}_0\mathbb{B}_0^T)\{d\phi\}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_V\mathbb{P}\phi_0^T(\mathbb{A}_0\mathbb{A}_0^T+\mathbb{B}_0\mathbb{B}_0^T)\phi_0-g\sum_{S_1}\mathbb{L}\{\eta_0\}-\sum_{S_1}\mathbb{L}\Big\{\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big\} \qquad \cdots(17)$$

ただし、$\mathbb{I}$：単位マトリックス、 $\mathbb{L}=\int_{S_1}[L]^T[L]\,dx=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}$

$\sum_V$：領域全体に関する総和、 $\sum_{S_i}$；境界 S_i に関する総和

式(16)、(17)の両式において、$\partial\phi/\partial t$ および $\partial\eta/\partial t$ は時刻 t での状態量であり未知である。そこで、これを次式のように考える。ここで $(\ )_0$ は $t-\Delta t$ での その値を意味する。

$$\partial\phi/\partial t=\frac{2}{\Delta t}d\phi-(\partial\phi/\partial t)_0 \quad , \quad \partial\eta/\partial t=\frac{2}{\Delta t}d\eta-(\partial\eta/\partial t)_0 \qquad \cdots(18)$$

5. 境界処理

式(16)の右辺末尾の項は境界 S_3 上での積分項である。図-5に示す様に S_3 上の辺 ij 上における $\bar{\phi}$ の値は、ϕ_i, ϕ_j を用いて

$$\phi=[N_i, N_j]\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\end{Bmatrix} \qquad \cdots(19)$$

同様に

$$\partial\bar{\phi}/\partial n=[N_i, N_j]\begin{Bmatrix}\partial\bar{\phi}_i/\partial n\\ \partial\bar{\phi}_j/\partial n\end{Bmatrix} \qquad \cdots(20)$$

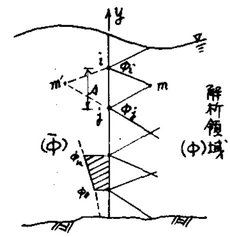

図-5 境界 S_3

したがって、式(16)の右辺末尾項は、

$$\int_{S_3}(\partial\bar{\phi}/\partial n)\phi\,dS_3=\sum_{S_3}\{\phi\}^T[S]\Big\{\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\Big\} \qquad \cdots(21)$$

ここに、$\mathbb{S}=[S]=\frac{A}{3}\begin{bmatrix}\bar{N}_i^2, & 1/2\,\bar{N}_i\bar{N}_j\\ 1/2\,\bar{N}_i\bar{N}_j, & \bar{N}_j^2\end{bmatrix}$ 　 $\bar{N}_i=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_ix_i+c_iy_i)$ 　 $\bar{N}_j=\frac{1}{2\Delta}(a_j+b_jx_j+c_jy_j)$

A：$\overline{ij}$ の長さ

であって、この変分をとる事によって式(16)の表現を得る。

さて、もし任意の時刻 t での $\partial\bar{\phi}/\partial n$ の値が既知であれば初期の ϕ_0, η_0 を与えて解析を進める事ができる。しかし、一般的に $\bar{\phi}$ は未知である。例へば、波の入射側では $\bar{\phi}=\bar{\phi}_i+\bar{\phi}_r$, ($\bar{\phi}_i$:入射波, $\bar{\phi}_r$:反射波等) 波の通過側では $\bar{\phi}=\bar{\phi}_t$ ($\bar{\phi}_t$:通過波等) であり、結局、連立方程式の中で、この未知量の数だけ条件式が不足する。しかるに、その数だけ新たに条件式を考えれば良い。例へば、エネルギー $\partial\phi/\partial t$ の連続を境界 S_3 上で考えると、$\int_{S_3}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t}dS_3=\int_{S_3}\frac{\partial\phi}{\partial t}dS_3$ である。この様な条件式を加えて、式(16), (17)と連立させて解く事により、時刻 t での全未知量を同時に求める事ができる。本法の具体例は ―数値計算結果― で述べている。

6. あとがき

本解析法を用いる事によって、表面移動のより一般的な状況における情報を得る事ができると思われ現在解析検討中であり、透過性領域への適用についても研究を進めている。また、微小振幅波の解析は、ここに示す方法を用いても比較的簡単に定式化できるがこれについては別の機会に報告したい。

参考文献

1) J.C. Luke; A Variational Principle for a fluid with a free surface, Journal of Fluid Mec. Vol.27, Part 2, pp.395～397, 1967

2) M. Ikegawa, K. Washizu; Finite Element Method Applied to Analysis of Flow over a Spillway Crest, Dep. Aeronautics. Univ. of Tokyo