I－18　　N台の走行車両による橋梁の二乗平均応答（　基礎理論　）

長崎大学工学部　正員　岡林　隆敏
学生員　○鐘　修道
学生員　中井　一彦

1．はじめに　不規則路面凹凸上を走行する車両による、橋梁の非定常不規則応答解析に関しては、単純桁橋、ランガー桁橋、連続桁橋と、種々の橋梁について研究が成されている。しかし、何れの場合でも、走行車両は単一走行車両であり、シミレーションを除いては、不規則振動論の観点から、一台以上の走行車両による橋梁の応答に関する研究[1]は余り成されていないのが現状である。この原因は、橋梁の応答は非定常確率過程になるのに加えて、各車両による応答の干渉効果の処理が複雑なことによるものと考えられる。しかし、実際の橋梁においては、数台の車両が同時に橋梁上を走行することはしばしばあり、1台以上の走行車両による橋梁の応答解析は重要である。本研究は、既に発表[2]した、橋梁・車両・路面系の運動方程式を伊藤型の確率微分方程式で表現した手法を、N台の走行車両の場合に拡張したものである。こゝでは、N台の走行車両による橋梁の応答解析の基礎理論を示した。本解法による応答の傾向を確認する為に、同一質量の2台の車両の車間距離を変化させた場合について、車両が走行する効果を無視した。定常理論による解析を行った。

2．橋梁－車両系の運動方程式と路面凹凸のモデル化　図1に示した、1自由度系でモデル化された車両が、一定速度Vで走行する際の、橋梁と車両の運動方程式は次の様になる。橋梁のx点の変位を$y(x,t)$、車両の変位を$z(t)$、更に、不規則路面凹凸を$n(t)$とすると、車両の方程式は、$W\ddot{z}+C(\dot{z}-\dot{y}(vt,t)-\dot{n})+k(z-y(vt,t)-n)=0$　(1)　こゝに、W，C，k，は、車両の質量、減衰係数、ばね定数である。橋梁のn次の基準関数を$\phi_n(x)$、基準座標を$g_n(t)$とすると、撓みと速度は、$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(t)g_n(t)$　(2)　$\dot{y}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(t)\dot{g}_n(t)$　(3)

$\ddot{g}_n(t)+2\rho_n\omega_n\dot{g}_n(t)+\omega_n^2 g_n(t)=\phi_n(vt)P(t)/M_n^*$　(4)　ただし、ρ_n，ω_nは、n次の減衰定数、固有円振動数、$P(t)$は車両の全接地力、M_n^*はn次の換算質量で、次式で表わされる。$M_n^*=\int_0^l\phi_n(x)^2dx$

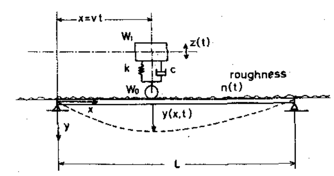

図1　走行車両のモデル化

路面凹凸のパワースペクトル密度を図2で示したが、本解析では、路面凹凸のパワースペクトル密度を次式でモデル化する。$S_R(\omega)=S_0/(\omega^2+\beta^2)$，$S_0=VA(2\pi)^2$，$\beta=2\pi\alpha$，$\alpha=0.05$　(5)　これは、次式で表わされる路面系の定常解過程のスペクトルである。$\dot{n}(t)+\beta n(t)=w(t)$　(6)　$w(t)$はS_0のパワースペクトル密度を有する白色雑音過程。詳細は文献(2)を参照されたし。今、橋梁系を1自由度系と仮定して、

$\mathbb{X}(t)=\{g_1,\dot{g}_1,z,\dot{z},n\}^T$　(7)　で表わされる状態変数を定義すると、(1)(4)(6)式は、次式の伊藤型の確率微分方程式で、ベクトル表示される。$\dot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{A}(t)\mathbb{X}(t)+\mathbb{W}(t)$　(8)

こゝに、$\mathbb{W}(t)$は、正規性白色雑音過程ベクトルである。

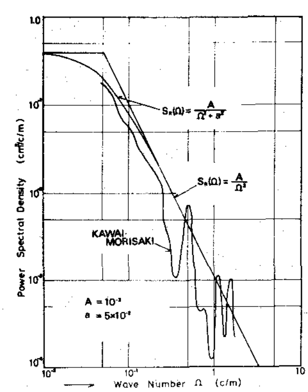

図2　路面凹凸パワースペクトル密度

3．N台の走行車両による橋梁の二乗平均応答の基礎式　車両がN台、順次橋梁に進入した場合を考える。i台目の車両による方程式は、路面の凹凸が同一波形であるので、$\dot{\mathbb{X}}_i(t)=\mathbb{A}_i(t)\mathbb{X}_i(t)+\mathbb{W}(t-t_i)$　(9)

ただし、$t<t_i$において、$\mathbb{A}_i(t)$，$\mathbb{X}_i(t)$は各々$\mathbb{O}$，$\mathbb{X}_i(t_i)=\mathbb{X}_{i0}$。尚、$t_i$は1台目の車両が橋梁に到達してから、$i$台目の車両が進入するまでの時間。ただし、$t_1$は0とする。従って、N台の車両が作用する橋梁の応答は、次式

で与えられる。 $\mathbb{X}(t)=\sum_{i=1}^{N}\mathbb{X}_i(t)$ (10) 路面凹凸関数を正規性過程と仮定したので、その応答$\mathbb{X}(t)$も正規性過程となり、その確率特性は、平均値と分散より完全に規定される。こゝでは、一般性を失うことなく、平均値を0として、分散のみに注目して解析を進める。$\mathbb{X}(t)$の分散は、(10)式より $E[\mathbb{X}(t)\mathbb{X}(t)^T]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E[\mathbb{X}_i(t)\mathbb{X}_j(t)^T]$ (11) となり、この解析は $E[\mathbb{X}_i(t)\mathbb{X}_i(t)^T]$, $E[\mathbb{X}_i(t)\mathbb{X}_j(t)^T]$, $E[\mathbb{X}_j(t)\mathbb{X}_i(t)^T]$, $E[\mathbb{X}_j(t)\mathbb{X}_j(t)^T]$の解析に帰着する。オー $t_i=\tau_i$とすると、(9)式は $\dot{\mathbb{X}}_i(\tau_i)=\mathbb{A}_i(\tau_i)\mathbb{X}_i(\tau_i)+\mathbb{W}(\tau_i)$ (12) となり、この解は $\mathbb{X}_i(\tau_i)=\Phi_i(\tau_i,0)\mathbb{X}_{io}+\int_0^{\tau_i}\Phi_i(\tau_i,\sigma)\mathbb{W}(\sigma)d\sigma$ (13) で与えられる。こゝに、$\Phi_i(\tau_i,\sigma)$は $\dot{\Phi}_i(t_i,t_k)=\mathbb{A}(t_i)\Phi_i(t_i,t_k)$ $\Phi(t_k,t_k)=\mathbb{I}$で定義される状態遷移行列である。

表-1 道路橋の諸元

スパン長 L (m)	総重量 W (×10⁴Kg)	曲げ剛性 EI (×10¹² Kg·cm²)	固有振動数 f_1 (Hz)
20	4.84	6.21	6.23
30	7.76	12.42	3.79
40	10.68	24.41	2.94
50	13.60	42.20	2.45
60	15.52	65.78	2.11
70	19.44	80.15	1.70
80	23.36	130.31	1.66
90	25.28	171.26	1.50
100	28.20	218.01	1.37

(i) $E[\mathbb{X}_i(\tau_i)\mathbb{X}_i(\tau_i)^T]$の解法 $\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i}(\tau_i)=E[\mathbb{X}_i(\tau_i)\mathbb{X}_i(\tau_i)^T]$, $\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i}=E[\mathbb{X}_i(0)\mathbb{X}_i(0)^T]$とすると、$\mathbb{X}_i(\tau_i)$の共分散は次式で与えられる。

$$\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i}(\tau_i)=\Phi_i(\tau_i,0)\mathbb{R}_{\mathbb{X}_{io}}\Phi_i(\tau_i,0)^T+\int_0^{\tau_i}\Phi_i(\tau_i,\sigma)\mathbb{Q}(\sigma)\Phi_i(\tau_i,\sigma)^T d\sigma \quad (14)$$

ただし、$\mathbb{Q}(\sigma)$は$\mathbb{W}(t)$の共分散である。(14)式の両辺を微分して、次式の共分散方程式を得る。 $\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{X}_i}(\tau_i)=\mathbb{A}_i(\tau_i)\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i}(\tau_i)+\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i}(\tau_i)\mathbb{A}_i(\tau_i)^T+\mathbb{Q}(\tau_i)$

$\mathbb{R}_{\mathbb{X}_{io}}=\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i}(0)$ (15)

(ii) $E[\mathbb{X}_j(\tau_j)\mathbb{X}_j(\tau_j)^T]$ の解法 (i)の場合と同様に次式を得る。

$$\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{X}_j}(\tau_j)=\mathbb{A}_j(\tau_j)\mathbb{R}_{\mathbb{X}_j}(\tau_j)+\mathbb{R}_{\mathbb{X}_j}(\tau_j)\mathbb{A}_j(\tau_j)^T+\mathbb{Q}(\tau_j) \quad (16)$$

(iii) $E[\mathbb{X}_i(\tau_i)\mathbb{X}_j(\tau_j)^T]$ の解法 $\mathbb{X}_i(\tau_i)=\Phi_i(\tau_i,\tau_j)\mathbb{X}_i(\tau_j)+\int_{\tau_j}^{\tau_i}\Phi_i(\tau_i,\sigma)\mathbb{W}(\sigma)d\sigma$ となるので、$\mathbb{X}_j(\tau_j)^T$を掛けて、両辺の平均を取ると、次式を得る。

$$E[\mathbb{X}_i(\tau_i)\mathbb{X}_j(\tau_j)^T]=\Phi_i(\tau_i,\tau_j)E[\mathbb{X}_i(\tau_j)\mathbb{X}_j(\tau_j)^T] \quad (17)$$

$$\mathbb{X}_i(\tau_j)=\Phi_i(\tau_j,0)\mathbb{X}_{io}+\int_0^{\tau_j}\Phi_i(\tau_j,\sigma_1)\mathbb{W}(\sigma_1)d\sigma_1 \quad (18)$$

$$\mathbb{X}_j(\tau_j)=\Phi_j(\tau_j,0)\mathbb{X}_{jo}+\int_0^{\tau_j}\Phi_j(\tau_j,\sigma_2)\mathbb{W}(\sigma_2)d\sigma_2 \quad (19)$$

こゝで、$E[\mathbb{X}_i(\tau_j)\mathbb{X}_j(\tau_j)^T]=\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j}(\tau_j)$, $E[\mathbb{X}_{io}\mathbb{X}_{jo}^T]=\mathbb{R}_{\mathbb{X}_{io}\mathbb{X}_{jo}}$ とすると、

$$\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j}(\tau_j)=\Phi_i(\tau_j,0)\mathbb{R}_{\mathbb{X}_{io}\mathbb{X}_{jo}}\Phi_j(\tau_j,0)^T+\int_0^{\tau_j}\Phi_i(\tau_j,\sigma)\mathbb{Q}(\sigma)\Phi_j(\tau_j,\sigma)d\sigma \quad (20)$$

これを微分して、次の共分散方程式を得る。 $\dot{\mathbb{R}}_{\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j}(\tau_j)=\mathbb{A}_i(\tau_i)\times\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j}(\tau_j)+\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j}(\tau_j)\mathbb{A}_j(\tau_j)+\mathbb{Q}(\tau_j)$ $\mathbb{R}_{\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j}(0)=\mathbb{R}_{\mathbb{X}_{io}\mathbb{X}_{jo}}$ (21)

従って、$E[\mathbb{X}_i(\tau_i)\mathbb{X}_j(\tau_j)^T]$は、(17)式と(21)式より得られる。

(iv) $E[\mathbb{X}_j(\tau_j)\mathbb{X}_i(\tau_i)^T]$ の解法 これは、$E[\mathbb{X}_j(\tau_j)\mathbb{X}_i(\tau_i)^T]=E[\mathbb{X}_i(\tau_i)\mathbb{X}_j(\tau_j)^T]^T$ の関係より得られる。

4. 数値計算

表1に示した単純桁橋を対象にして、同一質量の車両が2台走行する場合の定常応答理論によるr.m.s.速度応答を図3に図示した。これは、スパン長L＝20～60 (m) に関して、L/2を20分割した夫々の車間距離に対する、各スパン長の応答の変化である。図4、図5は、L＝30, 50(m) について、車間距離を変化させた場合であるが、同時に、両車両による応答の相関が0の場合、1の場合及び1台の車両の応答を示したものである。車間距離によって、2台走行の場合でも、1台の場合の応答より小さくなる場合があることがわかる。

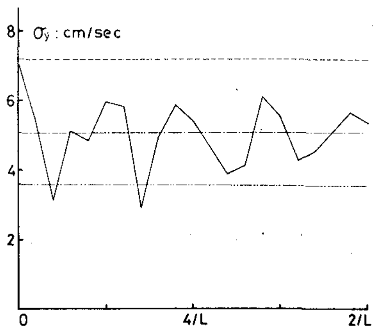

図3 スパン長 L＝30(m) 定常理論

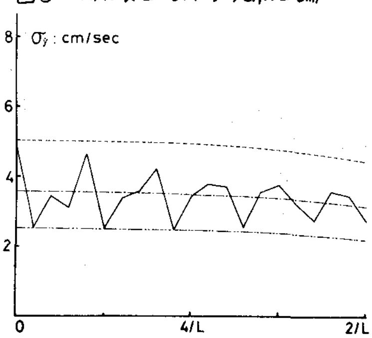

図4 スパン長 L＝50(m) 定常理論

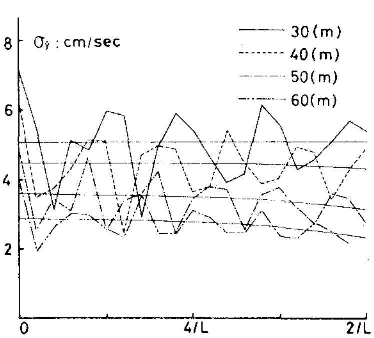

図5 定常理論

[参考文献] (1)山田・小堀：昭和42.12土木学会論文
(2)岡林 ：第32回全国大会