

熊本大学工学部 正員 〇秋吉 卓

同上 学生員 瀧田那彦

同上 学生員 斎藤洋一

同上 学生員 中尾寛一

1. まえがき 地震波伝播や地盤と構造物の相互作用の解析のため、離散的な地盤モデルを採用することが増えつつある。このとき問題になるのは設定した境界面に到達した波動をいかに透過させるかであり、<sup>(1,2,3)</sup> Lymer らがその手法を発表して以来、<sup>(4,5,6)</sup> viscous boundary あるいは transmitting boundary と呼ばれる境界が次々と提案されている。各々の手法ともに地盤の離散化に有限要素法を用いており、高速フーリエ変換を用いて迅速な計算が行なえる特色があり、多くの成果がすでに報告されている。しかしながら、これらの手法では、たんに周波数領域での計算が入ってくるため、地盤の剛性が履歴非線形の場合には適用が困難である。ここに提案する手法は差分的に地盤を離散化し、transmitting boundary の解析解を導いているので、非線形問題にも適用が可能である。

2. 解析手法 図-1(a) のような2次元平面モデルが水平振動のみを許されている場合を考える。図-1(b) では集中質量が水平・上下のせん断ばね  $k_1, k_2$  で結合された状態を示している (FEM では  $k_3$  も存在する)。

( $k, j$ ) 点の水平変位を  $\psi_{kj}$  とすると、運動方程式は次式のように書ける。

$$m\ddot{\psi}_{kj} + k_1(2\psi_{kj} - \psi_{k-1,j} - \psi_{k+1,j}) + k_2(2\psi_{kj} - \psi_{k,j-1} - \psi_{k,j+1}) = 0 \quad \text{----- (1)}$$

このときの初期条件は

$$\psi_{kj}(0) = \dot{\psi}_{kj}(0) = 0 \quad \text{----- (2)}$$

とする。そこで (1) の解を

$$\psi_{kj}(t) = X_k(t) Y_j \quad \text{----- (3)}$$

と仮定すると、分離変数  $\lambda$  に対して (1) は

$$\frac{\ddot{X}_k}{X_k} + p_1^2 \left( 2 - \frac{X_{k-1}}{X_k} - \frac{X_{k+1}}{X_k} \right) = -\lambda^2 \quad \text{----- (4)}$$

$$p_2^2 \left( 2 - \frac{Y_{j-1}}{Y_j} - \frac{Y_{j+1}}{Y_j} \right) = \lambda^2 \quad \text{----- (5)}$$

と分離される。ただし、 $t_0$ : 要素の厚さ、

$$p_1^2 = k_1/m, \quad p_2^2 = k_2/m, \quad m = \rho a b t_0, \quad k_1 = G b t_0 / a, \quad k_2 = G a t_0 / b, \quad \rho: \text{密度}, \quad G: \text{せん断弾性係数}.$$

$$\text{ここで (5) は } ([A] - \lambda^2 [I]) \{Y\} = \{0\}, \quad [A] = p_2^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

の固有値問題になるので、(6) の modal matrix を  $[Q]$ 、固有値を  $\{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\}$  としておく。

一方、(4) の  $\lambda$  次モード  $X_k^{(l)}(t)$  の Laplace 変換を  $\bar{X}_k^{(l)}(s)$  とし、その伝達関数を  $G_k(s)$  とすると

$$\bar{X}_k^{(l)}(s) = G_k(s) \cdot \bar{X}_{k-1}^{(l)}(s) = a_k G_k^k(s), \quad (k=1, 2, \dots; \quad l=1, 2, \dots, n) \quad \text{----- (7)}$$

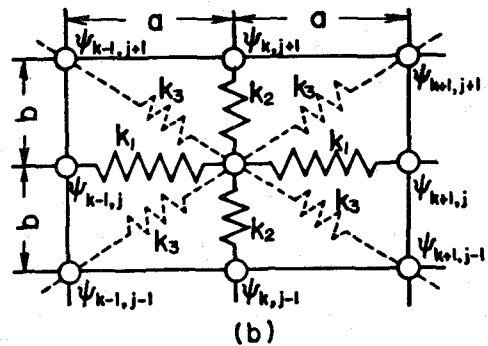
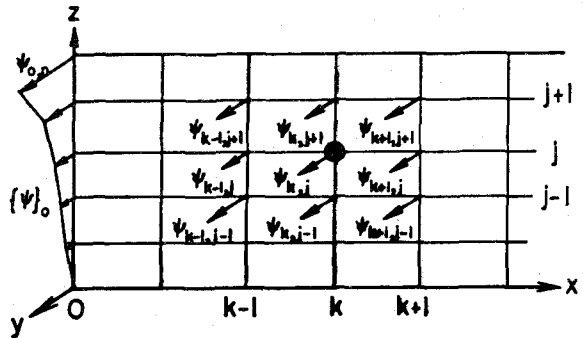


図-1 離散化した地盤モデル

(4) の  $k$  次モードを (2) の条件のもとに Laplace 変換して, (7) の関係を用いると次式をうる。

$$P_1^2 G_k(s) - (s^2 + 2P_1^2 + \lambda_k^2) G_k(s) + P_1^2 = 0 \quad \text{----- (8)}$$

$$\therefore G_k(s) = (\sqrt{s^2 + 4P_1^2 + \lambda_k^2} - \sqrt{s^2 + \lambda_k^2})^2 / 4P_1^2 \quad \text{----- (9)}$$

これより,  $k$  番目の変位ベクトル  $\{\bar{\psi}(s)\}_k$  は次式のように書ける。

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = \{Q\}_1 \bar{X}_k^{(1)} + \dots + \{Q\}_n \bar{X}_k^{(n)} = [Q] \begin{Bmatrix} \bar{X}_k^{(1)}(s) \\ \vdots \\ \bar{X}_k^{(n)}(s) \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} q_1(s) \\ \vdots \\ q_n(s) \end{Bmatrix} [Q]^T \{\bar{\psi}(s)\}_{k-1} \quad \text{----- (10)}$$

ところで,  $k$  列目の運動方程式は

$$\{\ddot{\psi}(t)\}_k + P_1^2 (\{\psi(t)\}_k - \{\psi(t)\}_{k-1}) + P_2^2 [A] \{\psi(t)\}_k + P_1^2 (\{\psi(t)\}_k - \{\psi(t)\}_{k+1}) = \{0\} \quad \text{----- (11)}$$

となるが, (10) を利用するとこの式の最後の項の Laplace 変換形は次式のように書き表わされる。

$$P_1^2 (\{\bar{\psi}(s)\}_k - \{\bar{\psi}(s)\}_{k+1}) = P_1^2 [Q] \begin{Bmatrix} \bar{H}_k(s) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(s) \end{Bmatrix} [Q]^T \{\bar{\psi}(s)\}_k, \quad \bar{H}_k(s) = \frac{1}{2P_1^2} \sqrt{s^2 + \lambda_k^2} (\sqrt{s^2 + \lambda_k^2 + 4P_1^2} - \sqrt{s^2 + \lambda_k^2}) \quad \text{----- (12)}$$

これの逆変換を  $-\frac{1}{m} \{\dot{T}(t)\}_k$  と置くと

$$-\frac{1}{m} \{\dot{T}(t)\}_k = P_1^2 (\{\psi(t)\}_k - \{\psi(t)\}_{k+1}) = P_1^2 [Q] \int_0^t \begin{Bmatrix} H_k(\tau) \\ \vdots \\ H_n(\tau) \end{Bmatrix} [Q]^T \{\psi(t-\tau)\}_k d\tau \quad \text{----- (13)}$$

$$\text{ただし, } H_k(\tau) = -\frac{J_2(2P_1\tau)}{\tau} + \lambda_k J_1(\lambda_k \tau) \frac{J_2(2P_1\sqrt{\tau^2 - r^2})}{\tau^2 - r^2} d\tau, \quad J_1(\cdot), J_2(\cdot) : \text{Bessel 関数} \quad \text{----- (14)}$$

すなわち,  $k$  列目の各復元力の右方よりの外力 (拘束力)  $\{\dot{T}(t)\}_k$  が  $k$  列目の変位  $\{\psi(t)\}_k$  で表わされた。このことから,  $k$  列目の右方に仮定の境界を設けて, 地盤を内部領域  $\{\psi(t)\}$  と外部領域 (半無限空間) とに分離するとき, 内部領域の運動方程式は次式のように書き表わすことができる。

$$[M] \{\ddot{\psi}(t)\} + \{R(\psi, \dot{\psi}; t)\} = \{F(t)\} + \{\dot{T}(t)\}_R + \{\dot{T}(t)\}_L \quad \text{----- (15)}$$

ただし,  $[M]$ : 内部領域の全質量マトリクス,  $\{R(\psi, \dot{\psi}; t)\}$ : 線形または非線形復元力ベクトル,  $\{F(t)\}$ : 外力ベクトル,  $\{\dot{T}(t)\}_R$ ,  $\{\dot{T}(t)\}_L$ : 内部領域の右方・左方境界に加える拘束力。

かくして, 閉じた領域の運動方程式が (15) で与えられたが, (15) の未知変位  $\{\psi(t)\}$  の数は自由度と同数であるから, 復元力  $\{R(\psi, \dot{\psi}; t)\}$  の如何に拘束する各時刻  $t$  の応答値  $\{\psi(t)\}$  が数値的に得られることになる。

3. 数値計算結果 図-2 は 5 層 8 列の離散モデルの 20 番目節点に, 振幅 50 gal の正弦波を一波与えたときの, 加振点およびそれに対称な点の加速度振幅  $\ddot{X}_5, \ddot{X}_{20}, \ddot{X}_{35}$  を比較したものである。地盤の分割要素が縦長, 1 層  $P_1 > P_2$  であれば波動は左右の境界より外側へ逸散して行くことが図 (a) に示している。一方横長の要素 ( $P_1 \leq P_2$ ) になると, 各モードの cutoff frequency が下ってくるため, 水平方向への伝播性が消え, 応答振幅が距離とともに減少するので注意を要する。他の結果は講義時に仰る。

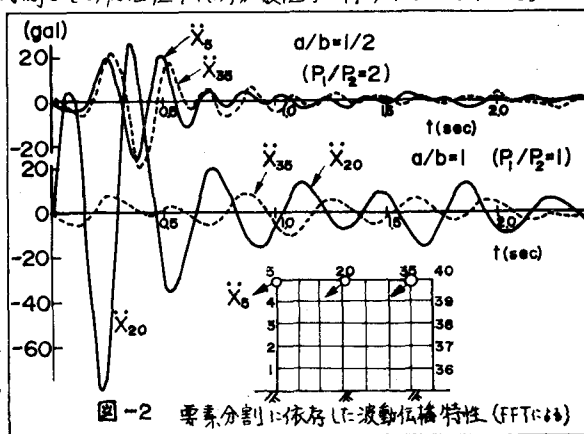


図-2 要素分割に依る波動伝播特性 (FFTによる)

参考文献 1) Lysmer, J.: Bull. of SSA, Vol. 60, No. 1, Feb., 1970, pp. 89-104, 2) Lysmer, J. et al.: Joul. of EM Div., ASCE, Vol. 95, No. EM4, Aug., 1969, pp. 851-877, 3) Lysmer, J. et al.: Joul. of EM Div., ASCE, Vol. 98, No. EM1, Feb., 1972, pp. 85-105, 4) 田辺見文: 日本建築学会論文報告集, 第243号, 1976.5, pp. 41-51, 5) Kausel, E. et al.: Joul. of EM Div., ASCE, Vol. 103, No. EM4, Aug., 1977, pp. 569-588, 6) White, W. et al.: Joul. of EM Div., ASCE, Vol. 103, No. EM5, Oct., 1977, pp. 949-964.