I－12　　非減衰応答解析から減衰応答解析へ

熊本大学　正員　平井一男
八代高専　正員 ○水田洋司

1. まえがき

構造物の動的応答を求める方法としてモーダル・アナリシスがある。これは、構造物の応答は互いに独立な1自由度の運動の重ね合せであるという考えに立脚しており、減衰がある場合にはモード間の連成を無視した解法である。減衰がある場合に、厳密に解く方法としては文献(1)の方法がある。本研究では、減衰のない運動方程式をモーダル・アナリシスにより解き、減衰項に相当する応答の補正を行なってモード間の連成を考慮した応答を求める方法を提案する。すなわち、実際の外力の他に減衰項に等価な外力(＝付加外力)を構造物に作用させて応答を求めようとするものである。

2. 基礎式

強制力 $\mathbb{P}(t)$ の作用する多質点系の運動方程式は

$$\mathbb{M}\cdot\ddot{\mathbb{W}}+\mathbb{C}\cdot\dot{\mathbb{W}}+\mathbb{K}\cdot\mathbb{W}=\mathbb{P}(t) \tag{1}$$

と表わせる。ここに、$\mathbb{M}, \mathbb{C}, \mathbb{K}$ はそれぞれ質量マトリックス，減衰マトリックス，剛性マトリックスであり、$\ddot{\mathbb{W}}, \dot{\mathbb{W}}, \mathbb{W}$ はそれぞれ、加速度ベクトル，速度ベクトル，変形ベクトル，$\mathbb{P}(t)$ は外力ベクトルである。また、変形ベクトルは固有モードと時間項の積として求めることができる。

$$\mathbb{W}=\Phi\cdot\mathbb{g}(t)=[\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n]\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t)\end{bmatrix} \tag{2}$$

ここに、$\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n$ はそれぞれ，1次，2次，$\cdots$ n次の正規化モードとする。(2)式を(1)式に代入し、正規化モードの特性を利用して整理すると次式を得る。

$$\ddot{\mathbb{g}}(t)+\Phi^T\mathbb{C}\cdot\Phi\cdot\dot{\mathbb{g}}(t)+\mathbb{W}^2\mathbb{g}(t)=\mathbb{F}(t) \tag{3}$$

ここに，$\mathbb{W}^2=\mathrm{diag}(\omega_i^2)$　　ω_i は i次の固有振動数 (4)

$$\mathbb{F}(t)=\Phi^T\cdot\mathbb{P}(t) \tag{5}$$

逐次積分によって応答を求める場合、任意時間点（n時間点）においても、(3)式は成立する。

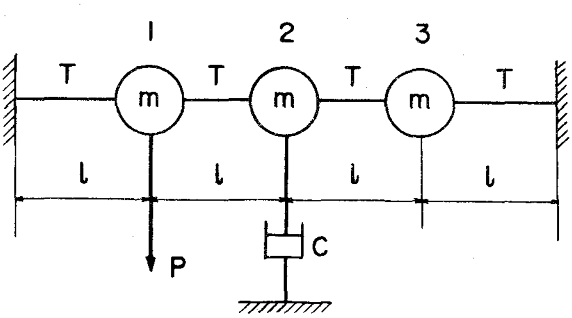
$$\ddot{\mathbb{g}}_n+\Phi^T\mathbb{C}\cdot\Phi\cdot\dot{\mathbb{g}}_n+\mathbb{W}^2\mathbb{g}_n=\mathbb{F}_n \tag{6}$$

一般に、$\Phi^T\mathbb{C}\,\Phi$ は非対角要素にも零でない値をもつため、このままではモーダル．アナリシスにより(6)式を解くことはできない。いま、減衰項に等価な外力を $\Delta\mathbb{F}_n$ で表わすと、(6)式は次式のように書ける。

$$\ddot{\mathbb{g}}_n+\mathbb{W}^2\mathbb{g}_n=\mathbb{F}_n+\Delta\mathbb{F}_n \tag{7}$$

$$\Delta\mathbb{F}_n=-\Phi^T\mathbb{C}\,\Phi\,\dot{\mathbb{g}}_n \tag{8}$$

(8)式の $\Delta\mathbb{F}_n$ があらかじめ計算されているならば、(7)式は各モードについて独立となり、モーダル・アナリシスの適用が可能となる。n時間点での応答は、時間間隔をh，$n-1$ 時間点での応答 $\mathbb{g}_{n-1}, \dot{\mathbb{g}}_{n-1}$ を初期条件として、Duhamel の積分により(7)式を解いて求めることができる。



m＝0·2111×10^{-3} kg·sec^2/cm　　T＝1·0kg
l＝100 cm

図−1. 3質点モデル

$$\mathbb{g}_n=\mathbb{C}os(h)\cdot\mathbb{g}_{n-1}+\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h)\dot{\mathbb{g}}_{n-1}+\mathbb{A}+\mathbb{B} \tag{9}$$

$$\dot{\mathbb{g}}_n=-\mathbb{W}\,\mathbb{S}in(h)\mathbb{g}_{n-1}+\mathbb{C}os(h)\dot{\mathbb{g}}_{n-1}+\dot{\mathbb{A}}+\dot{\mathbb{B}} \tag{10}$$

$$\ddot{\mathbb{g}}_n=-\mathbb{W}^2\mathbb{C}os(h)\mathbb{g}_{n-1}-\mathbb{W}\cdot\mathbb{S}in(h)\dot{\mathbb{g}}_{n-1}+\ddot{\mathbb{A}}+\ddot{\mathbb{B}} \tag{11}$$

ここに、$\mathbb{C}os(h)=\mathrm{diag}[\cos(\omega_i h)]$ (12)

$\mathbb{S}in(h)=\mathrm{diag}[\sin(\omega_i h)]$ (13)

$$\mathbb{A}=\mathbb{W}^{-1}\int_0^h \mathbb{S}in(h-\tau)\cdot\mathbb{F}_{n-1}(\tau)\cdot d\tau \tag{14}$$
$$\dot{\mathbb{A}}=\frac{\partial}{\partial h}\mathbb{A} \tag{15}$$
$$\ddot{\mathbb{A}}=\frac{\partial^2}{\partial h^2}\mathbb{A} \tag{16}$$
$$\mathbb{B}=\mathbb{W}^{-1}\int_0^h \mathbb{S}in(h-\tau)\cdot\Delta\mathbb{F}_{n-1}(\tau)d\tau \tag{17}$$
$$\dot{\mathbb{B}}=\frac{\partial}{\partial h}\mathbb{B} \tag{18}$$
$$\ddot{\mathbb{B}}=\frac{\partial^2}{\partial h^2}\mathbb{B} \tag{19}$$

表-1. 正規化モード

次数＼質点	1	2	3
1	$\frac{1}{0.0291}$	$\frac{\sqrt{2}}{0.0291}$	$\frac{1}{0.0291}$
2	$\frac{1}{0.0205}$	0	$-\frac{1}{0.0205}$
3	$\frac{1}{0.0291}$	$-\frac{\sqrt{2}}{0.0291}$	$\frac{1}{0.0291}$

表-2. 固有振動数 (Hz)

次数	固有振動数
1	5.2678
2	9.7335
3	12.7175

(17)式の$\Delta\mathbb{F}_{n-1}(\tau)$は時間間隔内で変化するが、時間間隔は微小、付加外力は実外力に比較して小さいと考えられるから、時間間隔内で$\Delta\mathbb{F}_{n-1}(\tau)$は一定であると仮定しても大差ないと思われる。$\Delta\mathbb{F}_{n-1}(\tau)=\Delta\mathbb{F}_n$とおいて整理すると

$$\mathbb{B}=\mathbb{W}^{-2}(\mathbb{I}-\mathbb{C}os(h))\cdot\Delta\mathbb{F}_n \tag{20}$$
$$\dot{\mathbb{B}}=\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h)\cdot\Delta\mathbb{F}_n \tag{21}$$
$$\ddot{\mathbb{B}}=\mathbb{C}os(h)\cdot\Delta\mathbb{F}_n \tag{22}$$

となり、(8),(10),(20)式より、付加外力$\Delta\mathbb{F}_n$を定めることができる。

$$\Delta\mathbb{F}_n=-(\mathbb{I}+\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\cdot\mathbb{\Phi}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h))^{-1}\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\cdot\mathbb{\Phi}(\mathbb{W}\cdot\mathbb{S}in(h)\cdot\mathbb{Q}_{n-1}+\mathbb{C}os(h)\cdot\dot{\mathbb{Q}}_{n-1}+\dot{\mathbb{A}}) \tag{23}$$

(23)式で求めた$\Delta\mathbb{F}_n$を(9)~(11)式に代入して応答を求めることができる。応答を求める手順を図表化すると、

① (23)式 ⟶ ② (9)~(11)式 ⟶ ③ $n=n+1$ ⟶ ①

となる。(23)式中のマトリックス$\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\cdot\mathbb{\Phi}\cdot\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h)$の各要素が1より小さい場合には、$(\mathbb{I}+\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\cdot\mathbb{\Phi}\cdot\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h))^{-1}$の値を級数展開により求めることができる。(24)式において、第何項までとればよいかということは、

$$(\mathbb{I}+\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\mathbb{\Phi}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h))^{-1}=\mathbb{I}-\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\cdot\mathbb{\Phi}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h)+(\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\cdot\mathbb{\Phi}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h))^2+\cdots \tag{24}$$

$\mathbb{\Phi}^T\mathbb{C}\mathbb{\Phi}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{S}in(h)$ のノルムに関係する。

3. 数値計算

図-1に示す3質点モデル[2]を例にとり本法の精度を数値計算により確めた。応答の比較は、一定外力と正弦波外力の2種類について行なっている。正弦波外力の振動数は、応答を共振に近い状態にするために、減衰を考慮した場合の1次固有振動数を用いている。本法の他に、減衰項の連成を無視したモーダル・アナリシス, Newmarkの$\beta=1/4$法（時間間隔$=T_{min}/50$,厳密解とみなす）によっても解析し、質点1の鉛直方向変位応答について比較している。紙面の都合上、計算結果は講演時に発表する予定である。

4. むすび

本法による解は厳密解とよく一致しているが、モーダル・アナリシスによる解には連成項無視の影響が出ている。減衰が大きくなるに従って、この傾向は強くなる。本法は減衰の大小に関係なく厳密解とよく一致した応答を与えているようである。しかし、時間間隔が大のときに安定で精度のよい解を与えるかどうかが問題である。このことは、今後いくつかの数値計算により確める必要があろう。本例題では、時間間隔を最小固有周期($=T_{min}$)にとっても安定で厳密解とよく一致した解を与えている。以上のことより、本法は近似解ではあるが連成項の影響を加味した応答を与えるため、減衰が大きい場合にはモーダル・アナリシスを補正する一方法として利用できるであろう。また、付加外力$\Delta\mathbb{F}_n$はモード間の連成を考慮すべきか否かの判断の材料としても利用できるであろう。

［参考文献］

(1) Hurty, W.C.: Dynamic Analysis of Structural Systems Component Mode Synthesis, AIAA Journal, 3, 1965.
(2) 河島佑男：動的応答解析, コンピューターによる構造工学講座 II-4-A, 培風館, pp.33~80, 1972.
(3) 伊藤哲次：モーダルアナリシスの弾塑性応答解析への応用, 中尾好昭・高野重昌：骨組構造物の弾塑性地震応答解析, 日本鋼構造協会第7回マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp.557~564, pp.573~580, 1973.