

長崎大学工学部 学生員 堀 友慈
長崎大学工学部 正員 高橋和雄

1. 緒言 構造物の長大化および大型化に伴い、軽量構造物が採用されているが、これらは薄肉弾性ばりおよび薄板を基本要素とするために、曲げに対する剛性が小さいから容易に有限変形を生ずる。たとえば橋梁におけるトラス橋やアーチ橋の腹材(吊材もしくは支柱)および送電鉄塔部材として鋼管もしくはH型钢からなる細長化の大きい部材が採用されている。その結果低周垂時における周期的な渦(カルマン渦)による振動問題が重要視されている。風洞実験などによって共振時の振幅が推定されているが、その際微小振動の振動数が用いられている。しかしながら、部材端はボルトなどによってガセットプレートに固定されて軸方向変位が拘束されているために振幅による引張力が中心軸に生ずることに起因する幾何学的な原因によって、これらの部材の固有振動数、振動波形や応力分布は微小振動理論からえられる結果とは異なることが予想される。また構造物部材として使用される場合には当然ながら死荷重による初期軸力や架設時からの温度変化による温度が力か作用することになる。著者らははりの部材の非線形振動の解析を行っているが¹⁾、本研究ははりの非線形振動に及ぼす初期軸力の影響および振動時にばりに生ずる軸力について報告するものである。

2. 運動方程式 端部で軸方向変位が拘束された細長いばりに一様分布の周期荷重および初期軸力が作用する場合の運動方程式は次のように与えられる。

$$P = P_0 - \frac{E}{2l} \int_0^l \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx, \quad L(y, P) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + PA \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C \frac{\partial y}{\partial x} + P \frac{\partial y}{\partial x} - P \cos \omega t = 0 \quad (2)$$

ここに、 l : はりの長さ、 E : ヤング率、 A : 断面積、 I : 断面2次モーメント、 y : たわみ、 x : 支点からの距離、 P : 単位体積重量、 C : 粘性減衰係数、 R : 初期軸力、 P : はりに作用する軸力、 p : 外力の荷重強度、 ω : 外力の円振動数、 t : 時間 運動方程式において非線形項は振幅によって生ずる軸力 P である。

3. 多自由度解析法 式(1)および式(2)を解くために、はりのたわみ y を次のように変数分離形に仮定する。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (3) \quad \text{ここに、} X_n: \text{境界条件を満足する座標関数、} T_n(t): \text{未知の時間関数}$$

式(3)の座標関数として軸力の作用しないはりの線形振動の規準関数を用いるものとする。式(3)を式(2)に代入しても左辺はゼロにならないので、Galerkin法を適用する。すなわち $\int_0^l L(y, P) X_n dx = 0 \quad (4)$

したがって

$$\ddot{T}_n + \alpha_n \dot{T}_n + \beta_n T_n + \bar{P} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} T_m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_{nlm} T_l T_m T_n = \gamma_n \bar{P} \cos \omega t \quad (5)$$

$$\text{ここに } \alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^4, \quad K_{nm} = \int_0^l X_n'' X_m'' dx, \quad h_n = \int_0^l C X_n'' dx / (2K_{nn} \alpha_n), \quad \beta_{nlm} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial X_n}{\partial x} \frac{\partial X_l}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx / (\lambda_n^3 K_{nn}), \quad \bar{P} = Rl^2 / EI, \quad \gamma_n = \int_0^l X_n dx / (\lambda_n^3 K_{nn}),$$

$$t = \omega t, \quad \bar{\omega} = \Omega / \omega, \quad K_{nm} = \int_0^l \frac{\partial X_n}{\partial x} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx, \quad \bar{P} = P / P_0, \quad \lambda_n = l \sqrt{PA \omega^2 / EI}$$

$$\varepsilon: \text{オイラーの定数係数, } \xi = x/l$$

上式は非線形常微分方程式である。非線形項の他に軸力を含む線形項に自由度間の重なりが見受けられる。これは初期軸力 $\bar{P}$ の大きさに依存して振動波形が変化することを意味するものである。ただし、両端単純支持ばりの自由振動では振動時の軸力の大きさに無関係に正弦波と与えられるために1自由度系として取り扱うことができる。

式(5)の定常解を手始めにあたって調和バランス法を適用する。式(5)の非線形項を力かすべて2次式であることを考慮のうえ解を次のようにフーリエ級数に仮定する。 $T_n = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^* \cos i \bar{\omega} \tau + b_i^* \sin i \bar{\omega} \tau) \quad (6)$

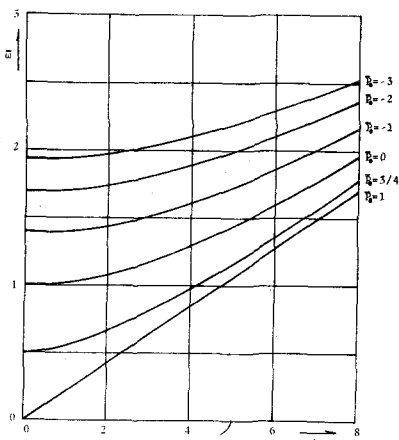


図-1 Amplitude frequency curves for various initial axial forces

式(16)式(15)に代入して調和バランス法を適用すれば未定々数 a_n, b_n を求めるための連立非線形代数方程式がえられる。任意の振動数比 ω に対して適当な初期値を与えればNewton-Raphson法を用いて a_n, b_n が決定される。なお、振動時にはりに作用する軸力比の時間的変動は式(11)から次のように与えられる。

$$\bar{P} \cdot \bar{P} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_n \cdot T_n \cdot T_m \quad \text{ここに} \quad f_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

4 解析結果 図-1に両端固定はりの1次振動の振動数比 ω と振幅比 A との関係を初期軸力比 $\bar{P}_0$ (初期軸力/オイラーの座屈荷重)をパラメーターにプロットした結果を示す。 $\bar{P}_0 > 0$ は圧縮力の領域に対応し、また $\bar{P}_0 < 0$ は引張力の領域に対応するものである。 $\bar{P}_0 = 1$ のオイラーの座屈荷重の場合には線形振動では復元力を持たないために無周期振動するが、非線形振動においては振動数は振幅にほぼ比例して増大する。初期軸力の影響は圧縮力の領域において顕著でかつ振幅比の小さい領域では敏感であるが、振幅比の大きい領域では小さくなる。図-2の実線は振幅比 A と振動数比 ω との関係を $\bar{P}_0 = 0$ についてプロットしたものである。図中のS.S.は単純支持を、またC.C.は固定の境界条件を示す。なお図-2において点線

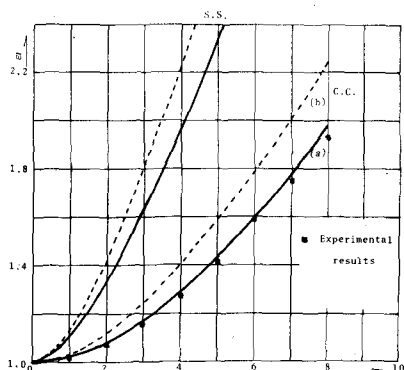


図-2 Amplitude frequency curves

表-1

Variation of modal shapes of clamped beams for various amplitude ratios ($P_0=1$)

ξ \ A	0	2	4	6	8
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0955	0.0966	0.1150	0.1452	0.1819
0.2	0.3455	0.3477	0.3829	0.4395	0.5046
0.3	0.6545	0.6568	0.6850	0.7297	0.7791
0.4	0.9045	0.9051	0.9147	0.9302	0.9473
0.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ははりのたわみによって生ずる最大軸力を用いて一定の軸力 $\bar{P} = \bar{P}_{\max} = \text{const.}$ の作用するはりの線形振動の微分方程式を用いて求めた結果である。図のように線形解との間にはかなりの差があり、振動数の予測には非線形振動理論を用いなければならない。表-1は $\bar{P}_0 = 1$ の場合の振幅に伴う振動形状の変動を示したものである。線形の場合の座屈変形から振幅の増大に伴い端部がふくらんだ形に変化していくことがわかる。図-3は両端単純支持はりと固定はりの振動時にはりのたわみに生ずる軸力の変動範囲を示すものである。すなわち、図において横軸は初期軸力比 $\bar{P}_0$ 、縦軸は振動時に生ずる最大軸力 $\bar{P}_{\max}$ の大きさを示すものである。すなわち、振幅比 A で振動しているはりの軸力は $\bar{P} - \bar{P}_{\max}$ の範囲で振動する。はりの曲げ剛性に比較して軸方向の伸び剛性はかなり大きいから、振動時に生ずる軸力は大きくなるので格点の応力度や疲労強度の推定には、軸力の影響を考慮することが必要であると考えられる。なお、はりの軸力比に対応する境界条件の座屈荷重を用いて無次元化した、はりに生ずる軸力の絶対値は境界条件によらず、ほぼ一定である。

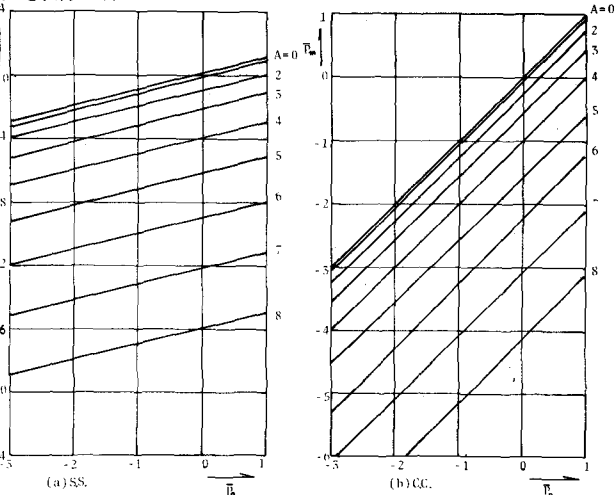


図-3 Relation between initial axial force and maximum axial force

5 結語 本論文ははりの非線形振動に及ぼす初期軸力の影響を検討したものであるが、定常強制振動および実験結果については当日発表の予定である。

参考文献 1) 成田 博江; 橋梁設計の耐震設計法 (I), 土木研究所資料 第753号 (昭和47年3月), 2) 原田; カルマン渦による送電鉄塔部材の振動とその防止策 (昭和52年4月), 3) Takahashi, K.; Nonlinear Free Vibrations of Beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 109~120 (1976)