Ⅶ―15　　交通流の解析理論に関する一提案

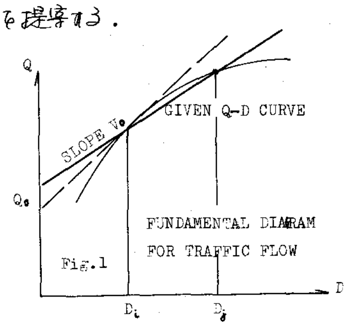
九州大学工学部　正会員　○樗木　武
九州大学工学部　学生員　土居隆彦

Ⅰ．緒言．　本研究は，交通路各断面の車線，勾配，曲率半径や交差点の存在等による複雑な交通容量変化や，流出入量の存在およびその時間的な変化等をも考慮し，実情に即した交通流解析手法を，流体相似にもとづいて確立することを企図するものである．また，提案された理論の解析には有限要素法の概念を導入し，その定式化を行うものであるが，定式化に当っては重み付き残差法を活用した．

Ⅱ．交通流の基礎微分方程式の誘導．　いま，交通路軸に沿ってx座標系を導入のうえ，微小区間dxに着目し，その左右両端から単位時間に流出入する交通量をQ，$Q+(\partial Q/\partial x)dx$とする．また，この区間の単位長さ当りに発生する交通量を単位時間当りg，密度の時間的変化を$\partial D/\partial t$とする．このとき，dx区間における連続条件から次の式がえられる．　$\partial D/\partial t+\partial Q/\partial x-g=0$　（1）．　一方，交通路の任意点xにおける交通量Qを，交通密度Dに比例する項と定数項とで表わされるものとして次式を提案する．

$Q=V_0D+Q_0$　（ここに，V_0，Q_0：定数）（2）．　式(1)に式(2)を代入すれば　$\partial D/\partial t+V_0\partial D/\partial x-g=0$　（3）．

ところで，交通流の支配方程式として交通量－交通密度曲線で与えられる基本ダイアグラムがある．この基本ダイアグラムは一般にQ，D間の凸型曲線関係であり，したがって，式中の定数V_0，Q_0を全ての交通密度区間に対して一定値とすることはできない．そこで，適当な密度区分を考え，その区分毎にQ-D関係が直線関係で与えられるものと解釈する．このとき，密度区分$[D_i, D_{i+1}]$では，V_0は基本ダイアグラムにおけるD_i，D_{i+1}間の割線係数，あるいはD_iにおける接線係数として定義できる．また，Q_0はこの割線または接線とQ軸との交点になる．



このように，式(2)が交通密度レベルに応じてそれぞれ定義されるものとすれば，本題の解析は時間に関して適当な刻みΔtで段階的に逐次行うことが妥当である．そこで，第I段階の時刻$t^{(I)}$における交通密度を$D^{(I)}$とし，これに対応するV_0，Q_0を$V_0^{(I)}$，$Q_0^{(I)}$と記号表示し，これらは$[t^{(I)}, t^{(I+1)}]$区間で一定値のままにとどまるものとする．また，任意点xにおける発生交通量も時間に関して段階的に変化するものとし，$[t^{(I)}, t^{(I+1)}]$区間で一定値$g^{(I)}$で与えられるものとする．交通密度に関しては時刻$t=t^{(I)}$で$D^{(I)}$，$t^{(I+1)}$で$D^{(I+1)}$とし，その間ではtの一次式で直線的に変化するものとすれば次式で表わされる．　$D(t)=D^{(I)}+\frac{1}{\Delta t}(t-t^{(I)})(D^{(I+1)}-D^{(I)})$　（4）．　$\partial D/\partial x$についてもDと同様のtの一次式を仮定する．以上の諸近似を式(3)に代入し，その両辺をtに関して$[t^{(I)}, t^{(I+1)}]$区間で定積分すれば，次式がえられる．　$V_0^{(I)}\overline{D}'+\frac{2}{\Delta t}\overline{D}-\frac{2}{\Delta t}D^{(I)}-g^{(I)}=0$　（5）．ここに，$\overline{D}=\frac{1}{2}(D^{(I+1)}+D^{(I)})$，$\overline{D}'=\partial\overline{D}/\partial x$．
すなわち，上式は時間に関して離散化された交通流の基礎微分方程式である．

Ⅲ．有限要素法による定式化．　いま，交通路を適当な小区間要素に分割し，これら要素の集合体としてとらえる．このとき，その一要素ijの交通密度$\overline{D}_{ij}$について考えよう．すなわち，$\overline{D}_{ij}$は一般に要素端iよりの距離xの関数とみなすことができるが，要素が小さいことを考慮して次のようなxの一次式に近似できる．

$\overline{D}_{ij}(\xi)=[1\ \ \xi]\,\mathbf{a}$　ここに，$\xi=x/l_0$，l_0：基準長さ，$\mathbf{a}^T=[a_1\ \ a_2]$（未定係数）　（6）

要素両端i，jの交通密度を$\overline{D}_i$，$\overline{D}_j$とすれば，これらは式(6)に$\xi=0$，ε_{ij}（$\varepsilon_{ij}=l_{ij}/l_0$，$l_{ij}$：要素ijの長さ）を代入することによりえられ，その結果から未定係数$\mathbf{a}$が決定できる．したがって，$\overline{D}_{ij}(\xi)$に関する次式がえられることになる．

$\overline{D}_{ij}(\xi)=[N_i\ \ N_j]\,\overline{\mathbf{D}}_{ij}$　（7）．　ここに，$N_i=1-\xi/\varepsilon_{ij}$，$N_j=\xi/\varepsilon_{ij}$，$\overline{\mathbf{D}}_{ij}=[\overline{D}_i\ \ \overline{D}_j]^T$

さて，節点iに直接結合しない要素領域では$N_i=0$とすると，展開関数は試行関数の和になる．そこで，重み

関数としてN_mを用い，式(5)にGalerkin法を適用すれば次式がえられる。

$$\int_L N_m V_0^{(t)} \bar{D}' ds + \int_L \frac{2}{\Delta t} N_m \bar{D} ds - \int_L \frac{2}{\Delta t} N_m D^{(t)} ds - \int_L N_m q^{(t)} ds = 0 \qquad (8)$$

本式に式(7)を代入すれば，式(8)左辺に対する一要素の寄与が次のように算定でき，その要素ijに関する部分をまとめてマトリックス表示すれば，形式的に次式がえられる。

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(t+1)} - \mathbf{B}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(t)} - \mathbf{Q}_0 \qquad (9)$$

ここに，

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{V_0}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{l_{ij}}{6\Delta t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \frac{q_{ij}^{(t)} l_{ij}}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{ij} = -\frac{V_0}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{l_{ij}}{6\Delta t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

式(9)を全要素について求め，これを用いて全体方程式を組立てれば，式(10)がえられ，これが時刻$t^{(t+1)}$の交通密度を算定するための基本連立方程式である。

$$[\mathbf{A}_{ij} \mathbf{D}^{(t+1)}] - [\mathbf{B}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(t)}] - [\mathbf{Q}_0] = \mathbf{0} \qquad (10)$$

なお，式(9)，(10)を要素および全体走行方程式と名付け，$\mathbf{A}_{ij}$を走行マトリックス，$\mathbf{Q}_0$を流出入マトリックスと名づける。また，定常状態では$\mathbf{D}_{ij}^{(t+1)} = \mathbf{D}_{ij}^{(t)} (= \mathbf{D}_{ij})$であるから，式(10)は次のように簡略化されることになる。

$$[\mathbf{C}_{ij} \mathbf{D}_{ij}] - [\mathbf{Q}_0] = \mathbf{0} \qquad (10)'$$

ここに，

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{V_0}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

IV. 初期条件および境界条件について． 初期条件は交通流が定常状態にある場合を考えるが，この定常状態の計算は式(10)′が用いられる。その際，式中のV_0は密度レベルにより異なるから，まず当初V_0を適当に仮定して試算し，ついで算定密度に相当するV_0を仮定しなおして計算をやり直すといった試算法が採用される。あるいは，流出，流入交通量を何段階に分けて漸増的に計算を遂行する方法も考えられる。 境界条件は，対象解析領域の最上流節点の交通密度変化で与えられる。すなわち，最上流節点を"1"とすれば，この節点1より上流からの流入交通量にみあう交通密度D_1を基本ダイアグラムにより示す関係から求め，これが境界条件として与えられることになる。

V. 計算上の注意事項． 非定常交通流の計算においては，非定常項と定常項の関係によっては解が振動することがある。たとえば，Fig.2に示す簡単な例において，当初要素12からの流入量が$q=q_0$で，定常状態にあったものとし，これが$q=0.8q_0$に変化するものとする。また，$V_0=480$ m/min. である。このとき，式(10)を直接計算し密度を求めれば，同図の点線のようになる。すなわち，解は振動し，またV_0の値から判断して$q=0.8q_0$の場合の定常状態に達する迄の時間が長く，実情に適合した解であるとはいえない。この問題は，前時間段階に対して次の時間段階に関する解を式(10)より求め，両者を平均することにより中間の時間段階に関する交通密度を求めて解とするといった手法を用いることにより解決できる。図中に示すD_2，D_3と時間との関係曲線はこのような手法により求めプロットしたものであり，ほぼ実情に即した解がえられているものと解釈することができるであろう。

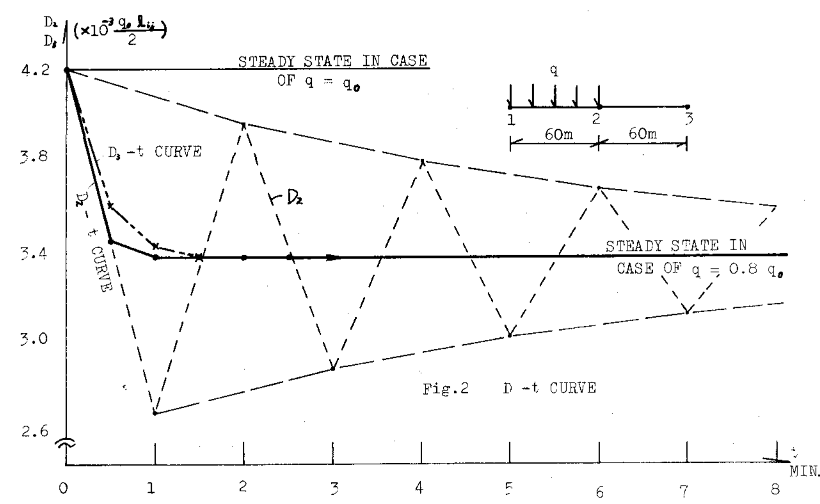


Fig.2 D -t CURVE