VII—14　　同時確率最大化による将来ＯＤ分布交通量の一推定法

九州大学　正会員　　樗木　武
九州大学　学生員　○篠原　覚二

1．まえがき　　本研究は，将来のＯＤ分布交通量を推定する一法とし，同時確率最大化の概念を活用するごとき著者らの方法を提案するものである。すなわち，現在パターン型あるいは分布モデル型の先験確率を用いて将来の分布交通量を確率論上の推定値として積極的に意味づけ，従来の成長係数法におけるような明確な意味をもたない推定諸法に代えんとするものである。

2．分布交通量の推定理論　　将来ＯＤ表の周辺分布値が既知であるものとし，i ゾーンの発生交通量を $y_{i\cdot}$，j ゾーンの吸収交通量を $y_{\cdot j}$，全交通量を Z_y と記号表示する。また，発生ゾーン数を m，吸収ゾーン数を n とする最も一般的なＯＤ表を考える。ゾーン i，j 間の将来分布交通量を y_{ij} とすれば，次の関係式が成立しなければならない。$\sum_j y_{ij} = y_{i\cdot}$，$\sum_i y_{ij} = y_{\cdot j}$　　(1)　　将来の分布交通量を求めることは，式(1)を満足する一組の解 y_{ij} を求めることに他ならないが，その解は無数に存在する。そこで，無数の解 y_{ij} の中で，最も確率的に起りやすいものが起るものと考える。y_{ij} の先験確率 p_{ij} が明らかであるものとすれば，ＯＤ表において一組の解 y_{ij} が生起する同時確率は，多項分布に関する定理から次式で与えられる。

$$P_y\{Y_{11}=y_{11},\cdots,Y_{ij}=y_{ij},\cdots,Y_{mn}=y_{mn}\}=\frac{Z_y!}{\prod_{ij}(y_{ij}!)}\prod_{ij}(p_{ij}^{y_{ij}})\qquad(2)$$

したがって，分布交通量 y_{ij} を求めることは，式(1)の条件のもとで式(2)を最大にする y_{ij} を求める問題に帰着せしめることができる。式(2)の両辺の対数をとり，Stirling の公式を適用し右辺の定数項以外の項で構成されるものを P_y' とする。このとき，

$P_y'=\sum_i\sum_j y_{ij}\log p_{ij}-\sum_i\sum_j y_{ij}\log y_{ij}$　　(3)　　式(1)の条件のもとに式(3)の P_y' を最大にする y_{ij} を求める手法として，Lagrange の未定係数法が活用できる。すなわち，未定係数 ω_i，λ_j を導入すれば，Lagrange 関数 L_y が次のようにえられる。

$$L_y=\sum_i\sum_j y_{ij}\log p_{ij}-\sum_i\sum_j y_{ij}\log y_{ij}+\sum_i\omega_i\Big(\sum_j y_{ij}-y_{i\cdot}\Big)+\sum_j\lambda_j\Big(\sum_i y_{ij}-y_{\cdot j}\Big)$$

したがって，

$$\left.\begin{aligned}&\partial L_y/\partial y_{ij}=\log p_{ij}-\log y_{ij}-1-\omega_i+\lambda_j=0 &&\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,m\\ j=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}\\ &\partial L_y/\partial\omega_i=\sum_j y_{ij}-y_{i\cdot}=0 &&(i=1,2,\cdots,m)\\ &\partial L_y/\partial\lambda_j=\sum_i y_{ij}-y_{\cdot j}=0 &&(j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

式(4)より y_{ij}，ω_i，λ_j を求めれば式(5)，(6)，(7)がえられるが，これらは非線形な関係にある。したがって，まず，$\lambda_j^{(0)}=0$ とおいて，式(6)より $\omega_i^{(1)}$ を求めこれを式(7)に代入して $\lambda_j^{(1)}$ をうる。ついで，$\lambda_j^{(1)}$ を式(6)に代入して $\omega_i^{(2)}$ を求め，さらに，式(7)から $\lambda_j^{(2)}$ を求める。$\omega_i^{(2)}$，$\lambda_j^{(2)}$ が所要の精度で $\omega_i^{(1)}$，$\lambda_j^{(1)}$ に合致していなければさらに計算を繰り返す。十分に合致したときの ω_i，λ_j を式(5)に代入すれば，求めんとする y_{ij} がえられる（試算法1）。あるいは ω_i と λ_j とを逆に用い，式(7)→式(6)の順に計算することも可能である（試算法2）。上述の試算法を用いるとき，一般に ω_i と λ_j の収束程度及び値に大きな差が生じる。そこで，ω_i，λ_j を同程度の収束性ならびに演算精度をうる方法として次のような手順を提案することもできる。まず，$\lambda_j^{(0)}=0$ として式(6)から $\omega_i^{(1)}$ を求め，また，$\omega_i^{(0)}=0$ として式(7)から $\lambda_j^{(1)}$ を求める。このとき，$\omega_i^{(0)}$ と $\omega_i^{(1)}$，$\lambda_j^{(1)}$ と $\lambda_j^{(0)}$ の各平均値を求め，これを ω_i，λ_j の第1近似値 $\omega_i^{(1)'}$，$\lambda_j^{(1)'}$ とする。ついで，$\omega_i^{(1)'}$，$\lambda_j^{(1)'}$ を式(6)，(7)に代入して $\omega_i^{(2)}$，$\lambda_j^{(2)}$ を算出する。このとき第2近似値が　$\omega_i^{(2)'}=(\omega_i^{(2)}+\omega_i^{(1)'})/2$，$\lambda_j^{(2)'}=(\lambda_j^{(2)}+\lambda_j^{(1)'})/2$　のように求められ，この結果と第1近似値とを比較対照する。このようにして両近似値が相互に十分合致するまで計算を続けるものである（試算法3）。

$$y_{ij}=p_{ij}\exp(\omega_i+\lambda_j-1)\qquad(5)$$

$$\omega_i=1+\log y_{i\cdot}-\log\Big(\sum_j p_{ij}\exp\lambda_j\Big)\qquad(6)$$

$$\lambda_j=1+\log y_{\cdot j}-\log\Big(\sum_i p_{ij}\exp\omega_i\Big)\qquad(7)$$

3．先験確率について　　(a)現在パターン型モデル　　現在ＯＤ表が与えられているものとすれば（表−1），これより先験確率 p_{ij} を求めることができる。いま，あるトリップが発地 i ゾーン，着地 j ゾーンとなる確率を p_{ij} とみなす。このとき，　$\sum_i\sum_j p_{ij}=1$　　(8)　　であり，また，現在ＯＤ表のデータが観測される確率は次式で

与えられる。

$$P_r\{X_{11}=x_{11},\cdots,X_{ij}=x_{ij},\cdots,X_{mn}=x_{mn}\}=\frac{Z_x!}{\prod_{ij}(x_{ij}!)}\prod_{ij}(p_{ij}^{x_{ij}}) \qquad (9)$$

表－1

O＼D	1 ····· j ····· n	発生
1		⋮
⋮		⋮
i	(x_{ij})	X_i
⋮		⋮
m		⋮
吸収	····· X_j ·····	Z_x

全てのx_{ij}が既知であるものとすれば，これら現在OD表の分布交通量は，式(8)の条件のもとで式(9)の同時確率を最大にする場合の実現値と解釈でき，この概念から先験確率p_{ij}が算出される。すなわち，p_{ij}を未知量として前項同様の手順を踏めば，結局，$L_x=\sum_i\sum_j x_{ij}\log p_{ij}+\lambda(\sum_i\sum_j p_{ij}-1)$ なる Lagrange 関数の極値問題になる。したがって，

$\partial L_x/\partial p_{ij}=x_{ij}/p_{ij}-\lambda=0 \quad \left(\begin{smallmatrix}i=1,2,\cdots,m\\ j=1,2,\cdots,n\end{smallmatrix}\right) \qquad (10)$ $\qquad \partial L_x/\partial\lambda=\sum_i\sum_j p_{ij}-1=0 \quad (11)$

式(10)から $p_{ij}=x_{ij}/\lambda \quad (12)$ 式(12)を式(11)に代入すれば，$1/\lambda\sum_i\sum_j x_{ij}=1 \quad \therefore \lambda=Z_x$ すなわち未定係数λは全交通量を意味し，このとき式(12)が次のように書き改められる。 $p_{ij}=x_{ij}/Z_x \quad (13)$

(b)分布モデル p_{ij}を $p_{ij}=A\,p_{i\cdot}^{\alpha}\,p_{\cdot j}^{\beta}\,t_{ij}^{-\gamma}$ （t_{ij}：時間距離，A,α,β,γ：定数） (14) のように表わしうるものとすると同時確率は次式で表わされる。 $P'_x=\frac{Z_x!}{\prod_{ij}(x_{ij}!)}\prod_{ij}(A\,p_{i\cdot}^{\alpha}\,p_{\cdot j}^{\beta}\,t_{ij}^{-\gamma})^{x_{ij}} \qquad (15)$

式(15)からA，α，β，γを求めればよい。前項と同様の手順を踏めば，結局，本題は

$L_x=\sum_i\sum_j x_{ij}(\log A+\alpha\log p_{i\cdot}+\beta\log p_{\cdot j}-\gamma\log t_{ij})+\lambda(1-\sum_i\sum_j p_{ij})$ の極値問題である。これより，

$\partial L_x/\partial A=1/A\cdot\sum_i\sum_j x_{ij}-\lambda\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}=0 \qquad (a)$ $\qquad \partial L_x/\partial\alpha=\sum_i\sum_j x_{ij}\log p_{i\cdot}-\lambda\sum_i\sum_j A\,p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}\log p_{i\cdot}=0 \qquad (b)$

$\partial L_x/\partial\beta=\sum_i\sum_j x_{ij}\log p_{\cdot j}-\lambda\sum_i\sum_j A\,p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}\log p_{\cdot j}=0 \quad (b)$ $\qquad \partial L_x/\partial\gamma=-\sum_i\sum_j x_{ij}\log t_{ij}+\lambda\sum_i\sum_j A\,p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}\log t_{ij}=0 \qquad (d)$

$\partial L_x/\partial\lambda=\sum_i\sum_j A\,p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}-1=0 \qquad (e)$

式(e)より $A=1/\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma} \quad (16)$ 式(16)を式(a)に代入すれば $\lambda=\sum_i\sum_j x_{ij}=Z_x \quad (17)$ 式(16), (17)を式(b), (c), (d)に代入すれば，α，β，γに関する次式をうる。

$(\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}\log p_{i\cdot})/(\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma})=1/Z_x\cdot\sum_i x_{i\cdot}\log p_{i\cdot} \quad (18)$ $\quad (\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}\log p_{\cdot j})/(\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma})=1/Z_x\cdot\sum_j x_{\cdot j}\log p_{\cdot j} \quad (19)$

$(\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij}^{-\gamma}\log t_{ij})/(\sum_i\sum_j p_{i\cdot}^{\alpha}p_{\cdot j}^{\beta}t_{ij})=1/Z_x\cdot\sum_i\sum_j x_{ij}\log t_{ij} \qquad (20)$

試策算法を用いてこの３式からα，β，γを求め，さらに式(16)に代入すれば定数がえられる。よって，これらの算出値A,α,β,γを式(14)に代入すれば分布モデル型の先験確率p_{ij}が定義できることになる。

4．適用例　適用例として福岡市を中心とするパーソントリップを示そう。４７年度に実施された北部九州圏パーソントリップ交通調査よりえられた現在ＯＤ表を用いて，昭和６５年度の分布交通量を現在パターン型先験確率を用いる場合の本法の試算法１，３より推定し，このときの周辺分布に対する収束状況を示せば表－２のごとくである。

表－２

	(1) 入力データ	(2) 試算法1 繰返し回数 30回	(2)－(1) / (1) ×100 %	(3) 試算法3 繰返し回数 4回	(3)－(1) / (1) ×100 %	(4) 試算法5 繰返し回数 30回	(4) (1) / (1) ×100 %
発生交通量	2 845 257	2 849 317	0.14	2 859 299	0.50	2 857 974	0.45
	421 660	422 561	0.21	425 564	0.93	424 331	0.63
	651 784	652 393	0.09	661 154	1.44	656 257	0.67
	691 571	691 882	0.04	698 042	0.94	692 914	0.19
	742 754	741 944	-0.11	739 051	-0.50	739 725	-0.41
	903 500	902 550	-0.11	898 801	-0.52	900 013	-0.39
	529 625	529 014	-0.16	528 202	-0.27	527 371	-0.43
	553 616	553 089	-0.10	552 877	-0.13	553 681	-0.35
	1 072 045	1 070 803	-0.12	1 048 852	-2.16	1 067 201	-0.45
	310 197	309 863	-0.11	308 866	-0.43	309 017	-0.38
	694 670	693 831	-0.12	695 714	0.15	691 808	-0.41
	231 723	231 356	-0.16	230 719	-0.43	230 748	-0.42
	155 748	155 548	-0.13	156 544	0.51	155 011	-0.47
吸収交通量	2 872 752	2 872 752	0.00	2 858 667	-0.49	2 860 011	-0.11
	429 342	429 342	0.00	425 403	-0.92	426 644	-0.63
	672 123	672 123	0.00	662 600	-1.42	667 580	-0.68
	709 335	709 335	0.00	702 728	-0.93	708 010	-0.19
	739 345	739 345	0.00	746 969	1.03	742 409	0.41
	897 098	897 098	0.00	901 145	0.45	900 617	0.39
	533 377	533 377	0.00	534 284	0.17	535 663	0.43
	555 584	555 584	0.00	555 948	0.07	557 558	0.36
	996 030	996 030	0.00	1 016 717	2.08	1 000 576	0.46
	306 802	306 802	0.00	308 084	0.42	307 979	0.38
	702 433	702 433	0.00	700 959	-0.21	705 344	0.41
	229 176	229 176	0.00	230 167	0.43	230 145	0.42
	160 753	160 753	0.00	160 013	-0.46	161 517	0.48
全	9 804 150	9 804 150	0.000	9 803 682	-0.005	9 804 052	-0.001

5．結語　本法の特色とするところを列挙すれば次のとおりである。(1) 本法による推定交通量は期待値としての意味を持つものであり，また，先験確率も現在ＯＤ表の実現確率を最大にするものとして定義でき，解析内容の物理的意味が明確である。(2) 本法ではμ_i，λ_jの決定に際して連立方程式を解く必要はなく，個別に計算できる点実用上極めて有利である。(3) 本法は対称，非対称周辺分布値をもつＯＤ表のいずれにも適用でき，汎用的である。

参考文献 — 佐々木　綱：遷移確率法によるＯＤ交通量の推定(エントロピー法)，道路，1966，pp.70～77.