

熊本大学 工学部 正 員 滝川 清
 熊本大学 工学部 正 員 田刈 幹修
 熊本大学 工学部 学生員 〇腰野 晶夫

1. はじめに 管内の振動流は、海底の波による流れや、U字管振動などに関する研究のモデルとして取り扱われる。この管内振動流の層流解を得ることは、研究上重要な事であるが、矩形管内振動流の解析解は見受けられないようである。矩形管の場合、円形管の場合と異なり、その境界が連続関数として与える事ができない為に純解析的に解を求める事は困難である。ここでは、矩形管振動流の層流解を、自由振動系の解である固有関数の和として表わす手法を示し、数値計算および実験結果から矩形管内層流振動流の流速分布について検討を加えたのでここに報告する。

2. 層流解 図-1に示すように座標系をとり、矩形断面水路の層流振動流について考える。流れは、 y, z 方向に速度成分を持たず、 x 方向に一樣であるとする。このとき、連続の式は、 $\partial U_x / \partial x = 0$ ----- (1)

Navier - Stokes の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial U_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu (\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

図-1 座 標 系

----- (2)

これより、圧力 P は断面内で一樣であって、圧力 p と流速 U_x が正弦的に変化するとして

$$\left. \begin{aligned} U_x(y, z; t) &= U(y, z) e^{i\omega t} \\ -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= K e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

とおく。式(3)を式(2)に代入すると、層流振動流の基礎式は式(4)で与えられ、境界条件は、式(5)で与えられる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - i\omega \rho \cdot U = -K/\nu \text{----- (4)}$$

$$U(0, z) = U(a, z) = U(y, 0) = U(y, b) = 0 \text{----- (5)}$$

式(4)を式(5)の条件の下で純解析的に解く事は困難であり、ここでは以下に示す方法を用いる。

まず、式(4)の右辺を0とおいた、次の自由振動系の解を考える。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - k^2 \varphi = 0 \text{----- (6)}$$

この Helmholtz の方程式の解は、境界条件： $y=0, a$; $z=0, b$ で $\varphi=0$ を満足するように決めると

$$\left. \begin{aligned} \text{固有関数: } \varphi_{mn}(y, z) &= C \sin \alpha_m y \sin \beta_n z \\ \alpha_m &= m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b \quad (m=1, 2, 3, \dots, n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

が得られる。この固有関数を用いて、式(4)を満す解の型を

$$U(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \alpha_m y \cdot \sin \beta_n z \text{----- (8)}$$

とすると、これは、境界条件式(5)を満足する事は明らかである。式(4)を満足するように、係数 A_{mn} を決定する。

式(4)の右辺は、領域 $0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq b$ で定義された関数と見なして、 $-K/\nu = \rho(y, z)$ とおき Fourier 級数に展開すると、結局、係数 A_{mn} は、

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= B_{mn} / \{-(\alpha_m^2 + \beta_n^2) - i\omega/\nu\} \\ \text{ただし、} B_{mn} &= 4/ab \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \rho(\xi, \eta) \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta \end{aligned} \right\} \text{----- (9)}$$

よって、求める解 $U_x(y, z; t)$ は次式で与えられる。

$$U_t(y,z;t) = -\frac{K}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y \cdot \sin \beta_n z}{(2m+1)(2n+1) \{-(\alpha_m^2 + \beta_n^2) - \frac{1}{\lambda^2}\}} e^{i\omega t} \quad (10)$$

$$\alpha_m = (2m+1)/a, \quad \beta_n = (2n+1)/b, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

ここで、断面平均の流速の振幅を $\bar{U}$ とすると、 $ab\bar{U} = \int_0^a \int_0^b U_t dy dz$ であるから、これを用いて、式(10)の無次元表示を行なうと、

$$\frac{U_t}{\bar{U}} = \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m y \cdot \sin \beta_n z}{(2m+1)(2n+1) (\lambda_{mn} + i\lambda')} e^{i\omega t} \quad (11)$$

$$\lambda_{mn} = \left\{ \left(\frac{2m+1}{a/b} \right)^2 + (2n+1)^2 \right\} \pi^2, \quad \lambda' = \frac{\omega}{\nu}$$

である。断面内の流速の分布は、この式(11)を用いて検討する。

3. 実験と数値計算結果 実験方法は、矩形水路(断面 $8.2 \times 8.2 \text{ cm}$)に、周期変動をするピストンによって発生した振動流中に、一定のパルス間隔で水素気泡を発生させ、これを写真撮影する事によって、流速分布を求め、数種の振動周期と振幅について実験を行なった。

図-2は、振動数の無次元パラメータ $\lambda = \sqrt{\omega/\nu} \frac{a}{2}$ が 59.3 (周期 $T=3.0$) 平均流速の振幅が 3.3 cm/sec の場合であって、断面中央での各位相 δ との流速分布を図示したものである。図中の δ は $\delta = \sqrt{2}\omega t$ で定義される境界層厚さを表わすパラメータである。これと同一条件での式(11)の数値計算結果は、図-3に実験線で示されていて、両者の一致は良い。(式(11)の計算に当っては、ここでは $m=0 \sim 75, n=0 \sim 75$ としている。)

図-3中の破線は、 $\lambda = 3.9$ の場合の矩形断面中央での流速分布であり、これは、振動流体を空気と想定した場合の計算結果である。図-4は、図-3との比較として示したもので、円形管振動流の解析解による計算結果である。図-5は、矩形断面形状の変化による、断面中央での流速の振幅、 $U/\bar{U}$ の分布を示したものである。この場合、 $\lambda = 59.3$ であって、境界層の厚さが薄い為、壁面のごく近傍を除けば、壁の影響は顕著に表われない、 a/b が 1 以上になると程んど壁の影響は見られない。図-6は、図-5中の $a/b = 1.0$ の場合の、隅角部近傍での流速の振幅を図示したものであり、矩形管内での流速分布の特徴が知られる。その他、 λ の変化や位相変化などに関する詳細な検討は講演時に発表の予定である。

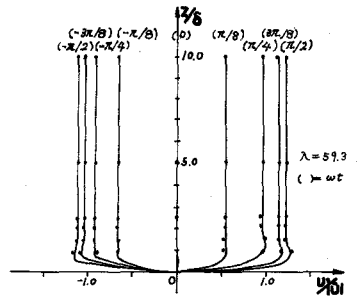


図-2 矩形管内流速分布(実験)

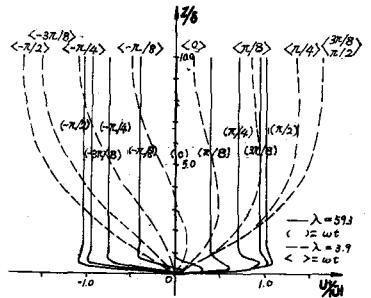


図-3 矩形管内流速分布(数値計算)

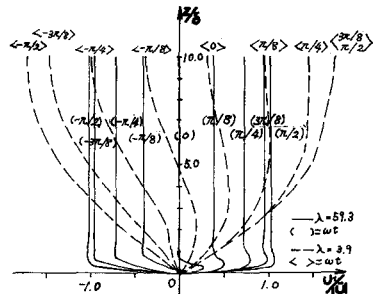


図-4 円形管内流速分布(数値計算)

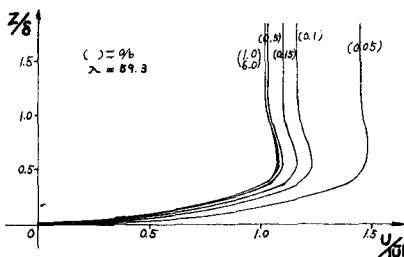


図-5 形状変化による流速の振幅の分布

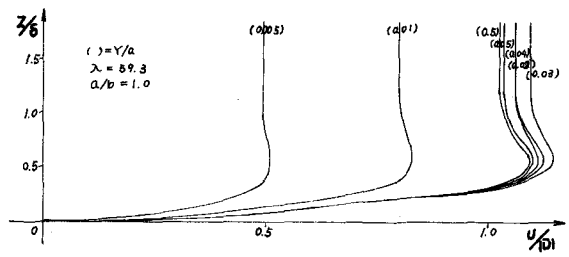


図-6 隅角部での流速の振幅の分布

参考文献 1) 日野 沢本 高須: 円管内振動流の乱流遷移に関する実験的研究, 土木学会論文集 第237号 1975, 5