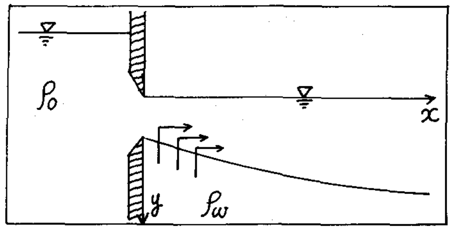
V－5　　密度差を有する静水上に噴出する二次元Jet

九州大学　正員　椿 東一郎
〃　　正員　小松 利光
〃　　学生員○井上 美公



1. まえがき　この報告は、密度差を有する静止流体上へ水平方向に流体が噴出する密度噴流について考察したものである。理論面では、Goertlerの二次元噴流の理論を摂動法により密度差を有する場に拡張した。

2. 理論　座標系を右図のように定義し、噴出する流体の密度をρ_0、静止流体の密度をρ_wとすれば、運動方程式は次のように書ける。

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \quad (1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x}=\rho g_0 \quad (2) \qquad \tau=\rho\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

体積及び質量欠損の保存式は、ε_{mass}を渦動拡散係数として

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (4) \qquad u\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w-\rho)+v\frac{\partial}{\partial y}(\rho_w-\rho)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\varepsilon_{mass}\frac{\partial(\rho_w-\rho)}{\partial y}\right\} \quad (5)$$

(1)、(2)式から圧力Pを消去し、τの表示として(3)式を用いると、

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\rho\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{g_0}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w-\rho) \quad (6)$$

次に、連続の式から流れ関数を定義すると、　$u=\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$、　$v=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$　(7)

(7)式を(5)(6)式へ代入することによって、

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}=\varepsilon\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\frac{g_0}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w-\rho) \quad (8) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial(\rho_w-\rho)}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial(\rho_w-\rho)}{\partial y}=\varepsilon_{mass}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\rho_w-\rho) \quad (9)$$

homogeneousな場合にGoertlerはPlandtlの第二仮説より、$\varepsilon=k\,b\,U_{max}$　(10)とおき、噴出源からある距離$x=S$での軸上最大流速をU_S、幅をb_Sとすれば、Φ、b、ηはそれぞれ次のように示される。

$$\Phi(x,y)=b_S U_S\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(\eta) \qquad b(x)=b_S\left(\frac{x}{S}\right) \qquad \eta=\frac{y}{b}$$

ここでは浮力の効果を取り入れ、しかも(10)、(11)式の関係を満足させるため、$\Phi(x,y)$を次のように展開する。

$$\Phi(x,y)=b_S U_S\left(\frac{x}{S}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\varphi_0(\eta)+(\alpha x)^n\varphi_1(\eta)+(\alpha x)^{2n}\varphi_2(\eta)+(\alpha x)^{3n}\varphi_3(\eta)+\cdots\cdots\right\} \quad (11)$$

密度の分布についても同様に　$\dfrac{\rho_w-\rho}{\rho_w-\rho_{min}(x)}=m(\eta)$　(12)

従って、　$\rho_w-\rho=\rho_{dS}\left(\frac{x}{S}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{m_0(\eta)+(\alpha x)^n m_1(\eta)+(\alpha x)^{2n}m_2(\eta)+(\alpha x)^{3n}m_3(\eta)+\cdots\cdots\right\}$　(13)

(11)、(13)式を基礎式へ代入して、(αx)の各ベキについて整理する。　ここで、境界条件を考えると、$y=0$で$v=0$、$u=U_{max}$、$\frac{\partial u}{\partial y}=0$、$\rho_w-\rho=\rho_d$、$\frac{\partial(\rho_w-\rho)}{\partial y}=0$　　また、$y=\infty$で$u=0$、$\frac{\partial u}{\partial y}=0$、$\rho_w-\rho=0$、$\frac{\partial(\rho_w-\rho)}{\partial y}=0$

従って、$\eta=0$で$\varphi_0=\varphi_1=\varphi_2=0$、$\varphi_1'=1$、$\varphi_0''=\varphi_1''=\varphi_2''=0$、$m_0=1$、$m_0'=m_1'=m_2'=0$　　また、$\eta=\infty$で$\varphi_0'=\varphi_1'=\varphi_2'=0$、$\varphi_0''=\varphi_1''=\varphi_2''=0$、$m_0=m_1=m_2=0$、$m_0''=m_1'=m_2'=0$、

homogeneousな場合に、Goertlerの解$\varphi_0(\eta)=\tanh\eta$をもつためには、$b_S=4kS$と定義し、$(\alpha x)^n$についてまとめた方程式の両辺を比較することによって$n=\frac{3}{2}$としてその値を代入する。

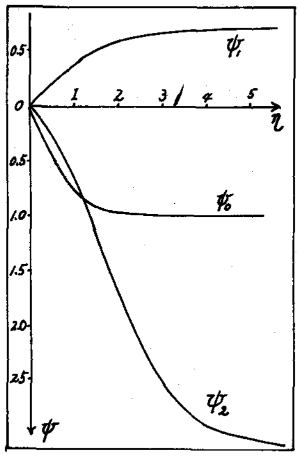
ここで渦動粘性係数εと渦動拡散係数ε_{mass}との比を1とおいて、境界条件を満足すれば

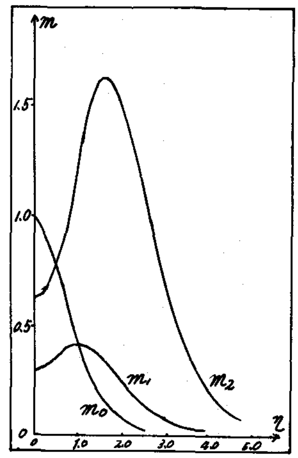
$$(\alpha x)^0\quad\begin{cases}\varphi_0=\tanh\eta\\ m_0=\dfrac{1}{\cosh^2\eta}\end{cases}$$

$$(\alpha x)^n \quad \begin{cases} \psi_1''' + \psi_1(\infty)\psi_0''' + 8\psi_1\psi_0'' + 2\psi_1''\psi_0 - 2\psi_1'\psi_0' - 4\eta m_0 - 2\int_\eta^\infty m_0\, d\eta = 0 \\ m_1'' + \psi_1(\infty) m_0'' - 4\psi_0' m_1 + 2\psi_1' m_0 + 8\psi_1 m_0' + 2\psi_0 m_1' = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha x)^{2n} \quad \begin{cases} \psi_2''' + \psi_1(\infty)\psi_1''' + \psi_2(\infty)\psi_0''' - 8\psi_0'\psi_2' + 14\psi_0''\psi_2 + 2\psi_0\psi_2'' + 8\psi_1\psi_1'' - 4\psi_1'^2 - 4\eta m_1 - 8\int_\eta^\infty m_1\, d\eta = 0 \\ m_2'' + \psi_1(\infty) m_1'' + \psi_2(\infty) m_0'' - 10\psi_0' m_2 - 4\psi_1' m_1 + 2\psi_2' m_0 + 14\psi_2 m_0' + 8\psi_1 m_1' + 2\psi_0 m_2' = 0 \end{cases}$$

ここで, $(\alpha x)^n$, $(\alpha x)^{2n}$の各べきの方程式の数値積分を施すことによって $\psi_0(\eta)$, $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta)$, $m_0(\eta)$, $m_1(\eta)$, $m_2(\eta)$ が得られる。これを図に示したものが右図である。





また, S, b_s, U_s, ρ_{ds}は 次のようにして求める。

$x=S$における全運動量は, S地点が噴出口に近く密度勾配にもとづくx方向の圧力勾配が無視できるとき,

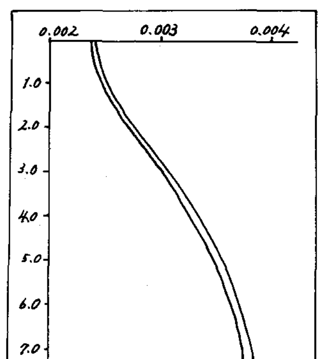
$$\rho_0 h_0 U_0^2 = \int_0^\infty \rho u^2 dy = \rho U_s^2 \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{-1} \psi_0'^2 dy$$
$$= \rho U_s^2 \frac{S}{S} b_s \int_0^\infty \psi_0'^2 d\eta \quad (\text{ここで } \sigma = \frac{b_s}{S})$$

中心軸上 $x=S$で $U_s=U_0$となる距離Sを求めると　$S = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot h_0$

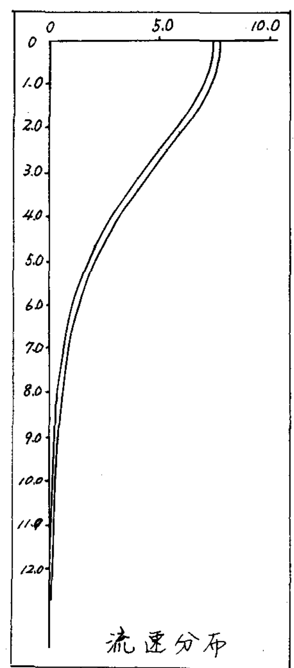
質量欠損の保存則より　$(\rho_w-\rho_0)\, h_0 U_0 = \int_0^\infty (\rho_w - \rho)\, u\, dy$　　これを解いて, $x=S$で $U_s=U_0$. 従って $\rho_{ds}=\rho_w-\rho_0$

3. 解析

今までに述べてきた理論を基に, 噴出口より30cmにおける流速分布, 濃度分布を計算したものが下図である。尚, 算出するための条件として, 噴出口の幅を0.40cm, 噴出口における流速を20.0 cm/sec, 静止流体の密度ρ_wと噴出する流体の密度ρ_0との差を0.004とした。この図からも判断できるように $(\alpha x)^{2n}$のべきまで考えた数値は, $(\alpha x)^0$だけを考えたものより小さめの値を示している。またこの理論値によれば $x=30$cmでは, $y=11.7$cm 以下において流速は負値となり, 二次元噴流の実験においてよく見られる逆流現象をよく現わしている。



濃度分布



流速分布

4. あとがき

筆者らは現在, 実験を行い理論値との比較を行っているが, 出口上端と下流水表面とが等しい表面噴流の場合であるので, Goertlerの噴流理論における拘束係数$\sigma = \frac{1}{7.67}$が妥当な値であるか疑問であり, 表面噴流に適応したσの値を考察している。また, その値を代入し実験値と比較すれば期待した結果が得られるだろう。

参考文献　1) Schlichiting ; Boundary-Layer-Theory , McGraw-Hill

2) 吉川·池田·川村; 躍層面へ噴出する二次元Jet, 第19回 水理講演会論文集 (1975)