V—4　密度噴流におけるレイノルズ応力及び乱流拡散のスペクトル特性

九州大学　正員　椿東一郎
〃　正員　小松利光
〃　学生員○秋山寿一郎

序

Reynolds応力($-\overline{u'v'}$)は剪断力及び乱れ生成に密接に関係している。また$\overline{\rho'v'}$は乱流拡散量に相当するとともに、乱れエネルギーが密度勾配に対してなす仕事量にも関連する極めて重要な物理量である。にもかかわらず、その機構はいまだほとんど明らかにされていない。ここで我々は$-\overline{u'v'}$, $\overline{\rho'v'}$について若干の考察を行なうとともに、今回得た実験結果と併わせ比較検討した。

本論

Reynolds応力及び$\overline{\rho'v'}$のスペクトルは次式で定義される。　ともにu'とv', ρ'とv'のクロス-スペクトルのコ-スペクトルに相当する。

$$-\overline{u'v'}=\int_0^\infty P_{uv}(k)dk \quad -① \qquad \overline{\rho'v'}=\int_0^\infty P_{\rho v}(k)dk \quad -②$$

〈慣性域〉従来、Reynolds応力のスペクトル$P_{uv}(k)$はエネルギー逸散率ε, 波数k, 及び速度勾配$\frac{dU}{dy}$によって規定されるとして、次元解析より

$$P_{uv}(k)=A\cdot\varepsilon^{2/3}\cdot k^{-5/3}\cdot f\left(\frac{dU/dy}{\varepsilon^{1/3}k^{2/3}}\right)\sim A\cdot\varepsilon^{2/3}\cdot k^{-5/3}\cdot\left(\frac{dU/dy}{\varepsilon^{1/3}k^{2/3}}\right)^n \quad -③$$

となる。Reynolds応力は$\frac{dU}{dy}$に比例するというBoussinesqの表示から、$n=1$としてLumleyによる④式が得られ、また$\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$に比例するというPrandtlの運動量輸送理論に従うとすると$n=2$より⑤式が得られる。

$$P_{uv}(k)=A\cdot\left(\frac{dU}{dy}\right)\cdot\varepsilon^{1/3}\cdot k^{-7/3} \quad -④ \qquad P_{uv}(k)=A\cdot\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\cdot k^{-3} \quad -⑤$$

図(1), 図-(2)は式④, 式⑤の妥当性を検討する為、今回の実験結果の慣性域に、$-7/3$乗則及び-3乗則を当てはめて、$P_{uv}(k)\cdot k^{7/3}/\left(\frac{dU}{dy}\right)$と$P_{uv}(k)\cdot k^3/\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$を求めそれぞれ$\varepsilon$に対しプロットしたものである。④式が成立する為には勾配1/3の直線、また⑤式が成立する為にはconstにならなければならない。ところが、図-(1), 図-(2)はほとんど無相関に近い。そこで我々は次のように考える。Reynolds応力は同じような乱流構造を持った乱れの場においても、平均速度勾配$\frac{dU}{dy}$によって大きく変るし、また$\overline{\rho'v'}$は平均密度勾配$\frac{d\rho}{dy}$によって大きく影響される。従って$-\overline{u'v'}$, $\overline{\rho'v'}$のスペクトルを普遍的な形で考えようとする場合は乱れの場だけに着目しなければならない。ここでは渦動粘性係数及び渦動拡散係数の形で考えなければならないであろう。渦動粘性係数のスペクトルϕ_Mは⑥式で示される。$\phi_M(k)$は慣性域でkと物理量ε_νによって規定されると考えると、次元解析より⑦式となる。

$$\phi_M(k)=\frac{P_{uv}(k)}{dU/dy} \quad -⑥ \qquad \phi_M(k)\sim\varepsilon_\nu^{1/2}\cdot k^{-2} \quad -⑦$$

ここでε_νは$\phi_M(k)$においてCascade downしていく物理量で、渦動粘性係数のdissipationに相当する物理量であり、次のように求められる。

$-\overline{u'v'}$のdissipationに相当する量をε'とすると、$\overline{u'v'}$の輸送方程式より

$$\varepsilon'=\nu(\overline{v'\nabla^2u'+u'\nabla^2v'})=-\frac{40\nu}{\lambda^2}\overline{u'v'}=\frac{40\nu}{\lambda^2}K_M\cdot dU/dy \quad (栗原による)$$

また、　$\varepsilon=15\nu\frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2}$　(ここでλはTaylorのmicro scale)

従って両式から、λ, νを消去すると　$\varepsilon'=\frac{40}{15}\cdot\frac{(-\overline{u'v'})}{\overline{u'^2}}\cdot\varepsilon$

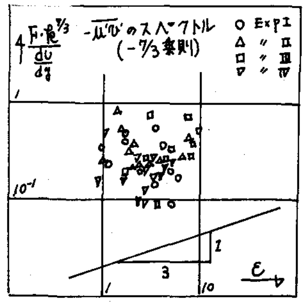

図-(1)

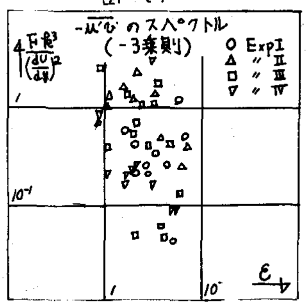

図-(2)

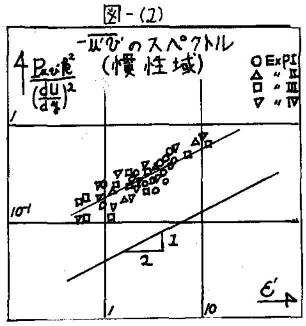

図-(3)

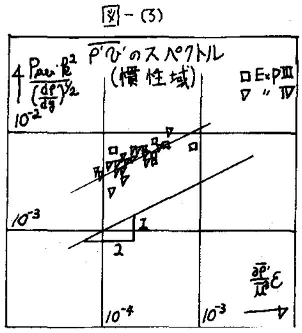

図-(4)

また，$\varepsilon_\nu = \varepsilon'/(\frac{dU}{dy})$ となる。そこでReynolds応力のスペクトル $P_{uv}(k)$ を ε'，$\frac{dU}{dy}$，k を用いて表わすと⑧式となる。

$$P_{uv}(k) = A_M\,\varepsilon'^{1/2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^{1/2} k^{-2} \quad \text{—⑧}$$

図-(3)は今回得た実験結果に⑧式の−2乗則を適用し，ε'に対しプロットしたものである。勾配1/2の直線を示し⑧式の成立性を良く示している。またスペクトル定数は $A_M = 0.185$ となる。

$\overline{pv}$ のスペクトル $P_{pv}(k)$ も同様に考える。ここで渦動拡散係数 K_p の粘性逸散に相当する物理量でスペクトルにおいて Cascade down していく量 ε_p を考える。ここで次の関係式が成立する。

$\varepsilon \sim \frac{\nu}{\lambda^2}\overline{u^2}$ 従って $\frac{\nu}{\lambda^2} \sim \frac{\varepsilon}{\overline{u^2}}$，同様に ε_p も $\varepsilon_p \sim \frac{\nu}{\lambda^2}K_p$ で表わされるものと考えると，$\varepsilon_p \sim \frac{\varepsilon}{\overline{u^2}}K_p$ 従って $\varepsilon_p \sim \frac{\overline{pv}}{\overline{u^2}}\cdot\varepsilon/(\frac{dP}{dy})$

慣性域では，$P_{pv}(k)$ は ε_p，k に規定されるとして次元解析を行なうと，

$$P_{pv}(k) \sim \varepsilon_p^{1/2}\cdot k^{-2}\cdot\frac{dP}{dy} \quad 従って \quad P_{pv}(k) = A_p\left\{\frac{\overline{pv}}{\overline{u^2}}\right\}^{1/2}\cdot\varepsilon^{1/2}\cdot k^{-2}\left(\frac{dP}{dy}\right)^{1/2} \quad \text{—⑨}$$

となる。Reynolds応力のスペクトルの場合と同様，図-(4)は⑧式の妥当性を良く示している。スペクトル定数 $A_p = 0.385$ となる。

〈粘性域〉 粘性域におけるReynolds応力及び $\overline{pv}$ のスペクトルを今本らによって提唱されているスペクトル相似則を用いて求める。今粘性域において渦動粘性係数のスペクトル $\phi_M(k)$ は k，ε_ν，動粘性係数 ν の3量によって規定されるとすると，Π定理より $\phi_M(k)/\varepsilon_\nu^{1/2}\cdot k^{-2} = A\cdot(\nu/\varepsilon_\nu^{1/2}\cdot k^{-1})^C$ —⑩

粘性域における乱れエネルギースペクトル(−13/3乗則)との相似条件より⑩式においてC=−2をとり，従って粘性域におけるReynolds応力のスペクトル $F_{uv}(k)$ は⑪式のごとくなる。

$$F_{uv}(k) = A'_M\cdot\varepsilon'^{3/2}\cdot\nu^{-2}\cdot\left(\frac{dU}{dy}\right)^{-1/2}\cdot k^{-4} = A'_M\left\{\frac{-\overline{uv}}{\overline{u^2}}\right\}^{3/2}\cdot\left(\frac{dU}{dy}\right)^{1/2}\nu^{-2}\varepsilon^{3/2}\cdot k^{-4} \quad \text{—⑪}$$

同様にして渦動拡散係数のスペクトルにスペクトル相似則を適用して，粘性域における $\overline{pv}$ のスペクトル $F_{pv}(k)$ は⑫式となる。

$$F_{pv}(k) = A'_H\cdot\nu^{-2}\cdot\varepsilon_p^{3/2}\cdot k^{-4}\cdot\frac{dP}{dy} = A'_H\nu^{-2}\left\{\frac{\overline{pv}}{\overline{u^2}}\right\}^{3/2}\cdot\left\{\frac{dP}{dy}\right\}^{-1/2}\cdot\varepsilon^{3/2}\cdot k^{-4} \quad \text{—⑫}$$

図-(5)，図-(6)は式⑪と式⑫の−4乗則の成立性を良く示している。

またスペクトル定数はそれぞれ $A'_M = 0.0018$ $A'_H = 7.0$ である。

図-(7)は $-\overline{uv}$，$\overline{pv}$ それぞれ10個の条件の異なるスペクトルを無次元表示したものである。両者とも慣性域において，−2乗則，粘性域において，−4乗則が成立することを良く示している。

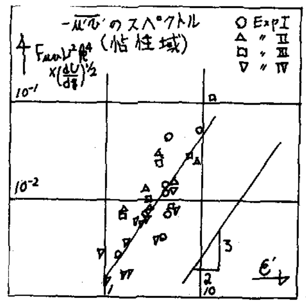

図-(5)

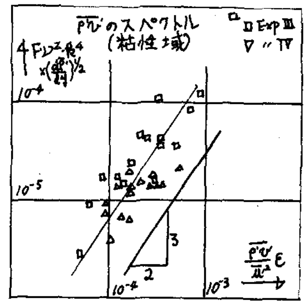

図-(6)

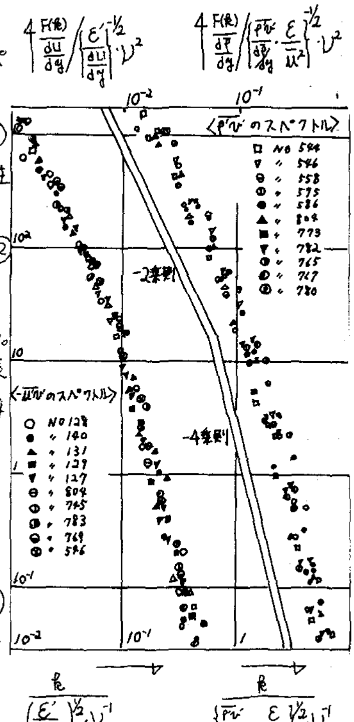

図-(7)

参考文献
1) Lumley, J.L and Panofsky, H.A
The structure of atmospheric turbulence (1964)
2) 粟原 道徳　流体渦動状態の研究(IV)（渦動粘性について）
九州大学 流体工学研究所報告 第三巻 第三号
3) 今本，浅野，石垣　開水路流れにおけるReynolds応力のスペクトル特性について，第31回年講 1976
4) 今本　開水路流れにおける乱れの移流過程について
第31回年講 1976