

九州大学 工学部 正員 神野健二
同・学員 山口宣男
同 正員 上田年比古

序、従来から浸透層内の流れの解析については、数多くの研究がなされてきたが、その手法は決定論的アプローチ (Taylor, Harleman) と確率論的アプローチ (Saffman, Scheidegger) に大別されるようである。実際の浸透層内の流れ、分散現象は非常にランダムな流速や空隙構造によって支配されており、そのランダム性を表現するうえで確率論的手法がより有利であると思われる。したがって、まず Saffman¹⁾ が考えた細管モデルによる解析について検討し、新たに細管径をランダム量とした場合の透水係数、および分散係数の評価、および実験による細管径の分布の決定を行なう。さらに、細管モデルを用いて浸透層内の分散現象のシミュレーションをして実験値と比較しつつ、細管モデルによる現象の表現の問題点について考える。つぎに、Scheidegger による分散現象の解析について検討し、これからの研究の方向について考えていきたい。

1. Saffman の統計的解析と細管径の分布の導入について

Saffman は浸透層内の空隙部分を均等径 a の細管の樹枝状結合体でおさかえた確率モデルを考え、単位細管内は Poiseuille 流れとして、確率的に空間平均をすることにより、次のような結果をえている。空隙内平均流速: $U = a^2 P / (24\mu) \dots (1)$
透水係数: $k = \lambda P a^2 / (24\mu) \dots (2)$ 主流方向の分散係数:
 $D_x = U l / 24$ or $D_x / \nu = R_0 / 24 \dots (3)$ ここで μ は粘性係数、 ν は動粘性係数、 λ は空隙率、 R_0 はレイノルズ数、 l は管長、 l は粒径 d によっている。なお、(3) 式は細管径の分布として正規分布、 $f(a) = N(\bar{a}, \sigma_a^2)$ を導入すれば²⁾ $D_x = \int a^2 f(a) da R_0 l / (24\mu)$ 、実験による分散係数は図-1) のようになり、著者ら、および Harleman の実験結果に比べ、(3) 式の Saffman の分散係数はかなり小さくなる。著者らの実験結果から分散係数の式は次のように表わされる。 $D_x / \nu = 0.83 R_0^{1.2} = 0.83 (U l / \nu)^{1.2} \dots (4)$

また、細管径の分布を考慮すると、 $D_x / \nu = 0.83 \left[\int a^2 f(a) da R_0 l / (24\mu) \right]^{1.2} \dots (5)$ 、(5) 式と著者らびさきに求めた透水係数: $k = \lambda P a^2 / (24\mu) / \int a^2 f(a) da$ とを連立させて解くと、 $\bar{a}$, σ_a が求まり、細管径の分布が求まる。このようにして求めた細管径分布と空隙部分を構成する粒子の粒度分布との関係を求めると、細管径の平均値は²⁾ 粒子径の平均値の大体 $1/10$ になるという結果がえられた。

2. 浸透層内の分散現象の細管モデルを用いたシミュレーション

上述のように、Saffman の細管モデルによる分散係数は、実際の分散現象を十分表わしていないので、その原因を検討するために、細管モデルを用いて分散現象についてのシミュレーションを行なった。いま、実験と対比するため、実験と同じ半径 5.2 cm の円筒内に樹枝状の細管を考え、円筒の中心軸を主流方向 X 軸、半径方向を R 軸、方向角を ψ とし、図-2) のように各細管の交点におけるその細管の中心位置を円筒座標系 (R, ψ, X) で表わし、さらに流体粒子はこの細管内の半径方向の位置 r で与えることにする。計算は 1) 粒子番号 i を与えて、 i 粒子の出发点 $X=0$ における R 座標を乱数を用いて決定、2) 細管が X 方向となす角 θ を $0 \sim \pi/2$ の乱数により決定、3) 細管の半径 a を正規乱数を用いて決定、4) 細管内での流体粒子の位置 r を流速分布の重みを付けて乱数に

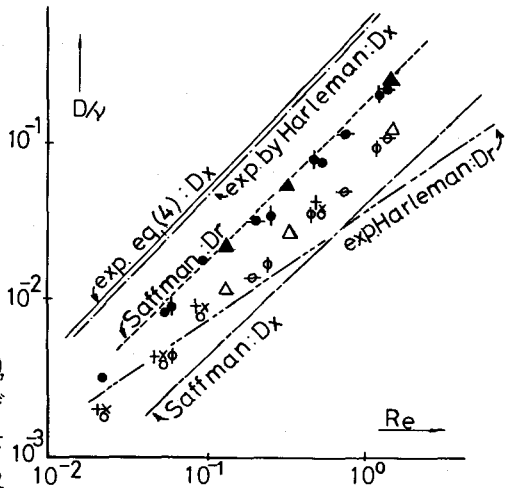


図-1) 分散係数と Re 数の関係

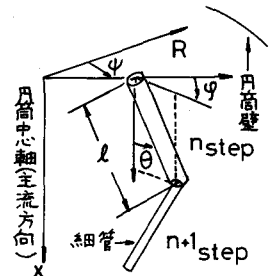


図-2) 細管モデル

より決定。5) 細管が前のステップで内筒壁面に当たったかどうかによって、当たっていたなら反射壁の処理として扱う。そうでないなら $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の乱数によって φ を決定。6) このステップで細管が壁面に当たるか否かの判定。当たるとすればその位置をその細管の終端とする。7) 細管の終端の位置を決めるため、半径方向の変位: $\ell \sin \theta \cos \varphi$, φ , 主流方向の変位: $\ell \cos \theta$ を計算。8) 細管内は Poiseuille 流れとして流速、滞留時間を計算する。9) $i+1$ 粒子についても同様に計算し、 J 個の粒子についての、 X, R 方向の変位の平均値、分散を求め、分散係数を計算する。

試料	ℓ	$\bar{a}$	σ_a	D_{zD}	$D_{\varphi D}$
1	0.0505	0.0097	0.0015	0	●
2	0.1282	0.0267	0.0016	0	●
3	0.1099	0.0184	0.0041	0	●
4	0.2740	0.0524	0.0075	△	▲

以上のシミュレーションも4種類の資料について、流速を変えて算定し、その結果を図-11) に示している。なお、この図には横方向の分散係数 D_r も併記した。シミュレーションによる縦方向の分散係数は、

Saffman の値に近く、実験値よりは小さい値となった。そこで、管長のランダム性、および細管結合部における合流流が分散係数に与える影響をみる。まず、細管長のランダム性を考慮して、管長が浸透層構成粒子の粒度分布と同じ対数正規分布をすると仮定してシミュレーションした結果が [表-3] であり、やや実験値に近づくが本質的な影響は与えない。つぎに、管径差による影響を考慮、流速粒子の流速と平均流速との大小関係より、加速、減速効果を考えた場合が [表-4] であり、この要因もあまり影響しないようである。実際の浸透層内の複雑な流路を流れる流速粒子のランダムな挙動を考えると、細管モデルだけでなく、細管モデルと新しい確率モデルの結合を考慮することが必要かと思われる。これは今後の問題とする。

3. Scheidegger による分散係数について

Scheidegger は浸透層内の流体粒子の挙動を次のように考えた。流速粒子の変位 $x = (x, y, z)$ の確率分布 $W(x, t)$ は中心極限定理より、 $W(x, t) = (4\pi Dt)^{-3/2} \exp \left[-\frac{1}{4Dt} \left\{ x + \frac{B}{\mu} \text{grad} p \cos \theta \cdot t \right\}^2 \right]$ 、変位 x の平均値、分散値は $\bar{x} = -\frac{B}{\mu} \text{grad} p \cos \theta \cdot t$, $\bar{x}^2 = \text{Var}[x] = \bar{x}^2$ より、 $\bar{x}^2 = 6Dt + \left(\frac{B}{\mu} \text{grad} p \cos \theta \right)^2 t^2$ (6) ここに、 B は浸透層の特性を表す確率変数。Scheidegger は D を求めるために、流体粒子について次のような運動方程式を考えた。

$B(f_0 - p \nabla x) = \mu \dot{x}$ (7)。ここに f_0 は外力項である。Scheidegger はここで、未知関数 x の一階微分の2乗の期待値が、平均値の一階微分の2乗に等しいと仮定して、(6) 式と (7) 式より分散係数が流速の2乗に比例するという結果をえているが、実際には流速の1乗に比例することが知られており、また上述の仮定の不明な点など Scheidegger の運動方程式では不十分であると考えられるので、ここではその解の確率密度関数が $W(x, t)$ となるような運動方程式を考えるべきであろう。そこで、Langevin 方程式として知られる確率微分方程式を考える。外力として平均量と、浸透層内のランダム性による変動量を考慮、その変動量として white noise を考えると、 x 方向について $\dot{x}(t) + \beta x(t) = f_0 + W(t)$ 。今、十分に大きい t を考えると、 $\beta t \gg 1$ より慣性項は省略でき、 $\dot{x}(t) = f_0/\beta + W(t)/\beta$ この式の両辺を $0 \sim t$ で積分すると、 $x(t) = \frac{f_0 t}{\beta} + W(t)/\beta$ 、ここに $W(t)$ は Wiener 過程である。 x についての自己共分散関数、 $R_{xx}(t) = (\alpha t + f_0^2 t)/\beta^2$ 、平均値は、 $\bar{x}(t) = \frac{f_0 t}{\beta}$ 、ダルシー則より流速は、 $u = \frac{f_0}{\beta} = \frac{\alpha \ell R_p}{\mu \rho_g}$ よって外力は、 $f_0 = \beta \alpha \ell R_p / \mu \rho_g$ と表わされる。 $x(t)$ の分散は $\sigma_x^2(t) = R_{xx}(t) - \bar{x}^2(t) = \alpha t / \beta^2$ 、ここには Wiener 過程のパラメータ。よって、 $\sigma_x^2(t) / 2t = \alpha / 2\beta^2 \equiv D$ なる分散係数を用いると $\alpha = 2\beta^2 D$ となり、したがって浸透層内の流体粒子の x 方向についての挙動はマクロ的に、平均値 $\bar{x}$ 、そのパワースペクトルが $2\beta^2 D$ であるような Wiener 過程を用いて、 $x(t) = (\alpha \ell R_p / \mu \rho_g) t + W(t)/\beta$ と書ける。

おすび、本報では、浸透層内の空隙を細管モデルでおきた確率モデルを用いて浸透層内の分散現象をシミュレートし、細管モデルでどのような要因が分散現象を支配するのかを検討したのだが、影響を与えると考えられる物理量を考慮しても本質的な変化はみられず、これは実際の分散現象には細管モデルだけでは表われない要因があるためであろう。したがって、今後これらの要因を確率モデルで表現できるように検討するとともに、流速粒子の運動方程式が Langevin 方程式で表現できるかどうかを検討していきたい。

参考文献 1) P.G. Saffman, "A theory of dispersion in a porous medium", Journal of Fluid Mechanics, No. 6, 1957

2) 上田、神野、山口、土木学会西部支部年報集 1976, 3) A.E. Scheidegger, "The physics of flow through porous media" 1960