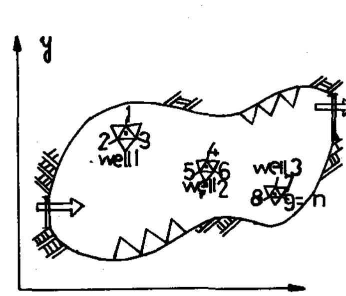
IV―19　　地下水の最適取水に関する一考察

九州大学　工学部　正員　神野 健二
同　○学生員　尾崎 哲二
同　学生員　長野 益徳
同　正員　上田 年比古

1．まえがき　地下水は、その恒温性，良好な水質，既得水利権との競合の少ないこと，また、取得に対する経済性などの利点から、工業，上水道の水資源として多く利用されてきたが、経済の成長に伴い、その揚水量の増大も著しく、これによって地下水位の低下現象に伴う種々の問題（地下水位の異常低下，地下水汚染，地盤沈下など）が各地で発生している。本報では、複数の井戸による地下水揚水で生じる基本的問題を検討し、線形計画法や最大原理を用いて、最適な地下水取水の方法論を確立しようとするものである。そこで地下水の利用状況および境界条件をふまえたうえで、問題を一定地域内の定常揚水における、複数井戸の流量配分問題と非定常揚水における、複数井戸の揚水ポンプ操作問題にわけ、これらをそれぞれ線形計画法と最大原理により考察することにする。

2．線形計画法による揚水量配分問題　領域を図-1に示すような平面2次元の被圧状態のポテンシャル場とする。計算領域の任意性、透水係数の不均一性などを考えた場合，他の方法に比して有限要素法には、汎用性があり、ここでは、有限要素法を用いて解析する。図-1のように領域を三角形に分割し、節点番号をつける。特異点である井戸の取扱いは、井戸を中心にして、それを取りかこむような小さな三角形を作り、井戸の揚水量は、この三角形の3点で置きかえて揚水するものとする。なお後の計算がうまくいくように、井戸を表わす節点番号を $i=1\sim n$ のように与え、他の節点番号を $i=n+1\sim m$ と与えることにする。周知のように有限要素法では(2.1)式に示すように、ポテンシャル $h(i)\ (i=1\sim m)$ についての連立一次方程式がえられる。 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{h}=\mathbf{Q}$ …(2.1) （$\mathbf{A}$ は $m\times m$ の係数マトリクスで、三角形の分割に依存し、透水係数を含む。$\mathbf{h}$ は $m\times 1$ の列ベクトルで、各節点におけるポテンシャルである。$\mathbf{Q}$ は $m\times 1$ の列ベクトルで境界条件および各節点の揚水量を示す。）



図－1

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\hline\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\hline\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{array}\right]$$

とし、(2.1)式を変形すると

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\hline\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\mathbf{h}_w\\\hline\mathbf{h}_r\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\mathbf{Q}_w\\\hline\mathbf{Q}_r\end{array}\right]\ \cdots\cdots(2.2)\ ,\quad \left[\begin{array}{c}\mathbf{h}_w\\\hline\mathbf{h}_r\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\hline\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\mathbf{Q}_w\\\hline\mathbf{Q}_r\end{array}\right]\ \cdots\cdots(2.3)$$

（$\mathbf{h}_w,\mathbf{Q}_w$ は $n\times 1$ の列ベクトルで井戸に関する，節点ポテンシャルおよび揚水量である。$\mathbf{Q}_r$ のうち境界の節点番号以外は、$\mathbf{Q}_r=0$ である。）

(2.2)式，(2.3)式より次式が求まる。 $\mathbf{Q}_w=(\mathbf{E}-\mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{21})^{-1}\cdot\mathbf{A}_{11}\mathbf{h}_w+(\mathbf{E}-\mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{21})^{-1}\cdot\mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{22}\cdot\mathbf{Q}_r$ …(2.4)（$\mathbf{E}$ は $n\times n$ の単位マトリクス） (2.4)式において $(\mathbf{E}-\mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{21})^{-1}\cdot\mathbf{A}_{11}=\mathbf{P}$，$(\mathbf{E}-\mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{21})^{-1}\cdot\mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{22}\cdot\mathbf{Q}_r=\mathbf{g}$ は、既知であるから、$\mathbf{Q}_w$ は $\mathbf{h}_w$ によって決定されることが判る。(2.4)式を $\mathbf{P}$，$\mathbf{g}$ を用いて表わすと、次のようになる。 $\mathbf{Q}_w=\mathbf{P}\cdot\mathbf{h}_w+\mathbf{g}$ …(2.5)　ここで、$|Q_{wi}|\ (i=1\sim n)$ の限界最小揚水量 $|Q_{wi}^*|$ を規定し、さらに井戸のポテンシャル h_{wi} が被圧の状態を保つような条件を付加し、Q_{wi} の総量，$g=\sum_{i=1}^{n}|Q_{wi}|$ を最大にする $\mathbf{Q}_w$ を見い出すことを考える。すなわち、次式のように定式化する。 $|Q_{wi}|\geq|Q_{wi}^*|\ (i=1\sim n)$ …(2.6)　$h_{wi}\geq h_0\ (i=1\sim n)$ …(2.7)　という条件下に $g=\sum_{i=1}^{n}|Q_{wi}|$ …(2.8)　を最大にする Q_{wi} を求める。(2.6)，(2.7)，(2.8)式を(2.5)式を用いて表わすと、(2.6)式は $-\mathbf{P}\mathbf{h}_w-\mathbf{g}\geq-\mathbf{Q}_w^*$ より $-\mathbf{P}\cdot\mathbf{h}_w\geq\mathbf{g}-\mathbf{Q}_w^*=\mathbf{Q}_w^{**}$ …(2.6)'　(2.8)式は、$g=\sum_{i=1}^{n}P_{i1}\cdot h_{w1}+\sum_{i=1}^{n}P_{i2}\cdot h_{w2}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}P_{in}\cdot h_{wn}+\sum_{i=1}^{n}g_i$ …(2.8)'　ここで、g は負の値である。また、$\sum_{i=1}^{n}P_{i1}=a_1,\ \sum_{i=1}^{n}P_{i2}=a_2,\cdots,\sum_{i=1}^{n}P_{in}=a_n$ とおけば、g の最大を求めるには、$f=\sum_{i=1}^{n}a_ih_{wi}$ …(2.9)　を最小にすることより求まる。すなわち、(2.6)'，(2.7)，(2.9)式は、変数を $h_{wi}\ (i=1\sim n)$ とするL.P問題となっているので、これを解くことにより、最適の揚水量配分がえられるものと考えられる。

3. 最大原理による非定常揚水問題　前述の定常揚水に対し、非定常揚水問題を最大原理を用いて考える。簡単のために垂直2次元の場に溝を作り、これを井戸とみなして揚水するものとする。まず、基礎式として、ダルシー則と連続の式より、被圧と不圧の場合とにわかれるのであるが、簡単のため不圧の場合も線形近似した次式を用いるものとする。すなわち、$\partial h/\partial t=\beta\cdot\partial^2 h/\partial x^2$ …(3.1) である。(ここで、hはポテンシャルである。また、βは透水係数，空隙率を含む定数である。) 次に、この基礎式を空間的に離散化する方法としては、次のように差分法を用いる。すなわち、$\partial h/\partial x=(h_{i+1}-h_i)/\Delta x$，$\partial^2 h/\partial x^2=\{(h_{i+1}-h_i)/\Delta x-(h_i-h_{i-1})/\Delta x\}/\Delta x=(h_{i+1}-2h_i+h_{i-1})/\Delta x^2$ から $dh_i/dt=\beta\cdot(h_{i+1}-2h_i+h_{i-1})/\Delta x^2$ …(3.2) である。次に、井戸近傍における境界条件を考慮して(図-2)連続の式をたてると、$dh_j/dt=(k\cdot H_0/r)\cdot(h_{j-1}-2h_j+h_{j+1})/\Delta x-Q(t)/r$ …(3.3) となる。(jは井戸の節点であり、rは井戸すなわち、溝の幅である。kは透水係数，H_0は浸透層の厚さである。)

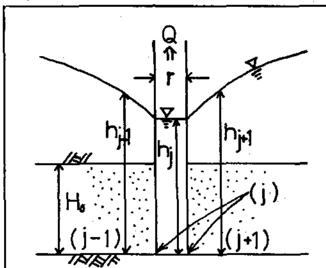


図 - 2

ここで、(3.2),(3.3)式より考えれば、状態方程式は、$d\mathbf{h}/dt=\mathbf{A}\cdot\mathbf{h}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}$ …(3.4) となる。ここで、井戸の水位を h_i ($i=1\sim n$)(nは井戸の数とする。)となるように変形しておく。

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{h}_w/dt \\ d\mathbf{h}_r/dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{h}_w \\ \mathbf{h}_r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_w \\ \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} \quad \cdots(3.5)$$

(ここで、係数行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$は、定数とし、境界条件を含む。また、$\mathbf{Q}_r$は境界条件であり定数である。) 以上より、井戸で揚水される地下水場は、(3.4),(3.5)式のようにベクトル状態方程式となることが明らかとなった。実際の地下水場においては、次のような地下水の揚水に関する問題が生じている。例えば、地盤沈下，地下水位の異常低下，揚水費用などの問題である。水資源の不足から考えれば、揚水量を最大にするのが当然であるが、前記の問題を考慮すれば、無制限に揚水することは、できない。そこで上の問題を考慮した条件を含み、揚水量を最大にする問題として考える必要があると思われる。したがって、ここでは、典型的な取水問題を次の(1),(2)につき考察する。　(1) $J=\int_0^T\sum_{i=1}^{n}(Q_i-\alpha|Q_i|^k)dt$，$J\Rightarrow max$ …(3.6)　また、$t=T$で $\mathbf{h}_w=\mathbf{h}_a$ …(3.7)　とする。ここで、被積分関数の第1項は揚水量であり、第2項は揚水に要する費用である。ゆえに、Jは一定時間(T)の揚水による利益の総量を意味する。また、地盤沈下と水位の異常低下を考慮して、井戸の水位の最低限界を最終の状態($t=T$)において指定しておく。これは、揚水による地下水位の低下が井戸において、最低になると考えられるからである。　(2)として、地盤沈下が、水位低下量に比例することから、水位の低下量を費用に換算して、$f(\mathbf{h}(T))$ とすれば、$J=\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n}(Q_i-\alpha|Q_i|^k)\right]dt-f(\mathbf{h}(T))$ …(3.6)′ として、$J\Rightarrow max$の問題と考えられる。また、現実には、ポンプの揚水能力の限界などから、流量Q_iに制限がつき、次のようになる。　$|Q_i|\leqq Q_a$ …(3.8)　これらは、(3.5)式を状態方程式とし、(3.6)又は(3.6)′式を評価関数，(3.7),(3.8)式を制限条件とする最適制御問題となっている。これらの問題が線型系の最適問題に帰着されることが明らかとなったことから、最大原理によって、解くことができ、最適の揚水状態がえられるものと考えられる。

4. 考察　本報では、従来の地下水取水の考え方，すなわち、取水と地下水位との関係だけを求めるような方法では、社会的問題となっている地盤沈下対策などの制約を考慮した合理的な取水が解析できないと考え、最適取水についての2．3．の考察を行なったものである。えられた結果をまとめると、地下水場を有限要素法や差分法により空間的に離散化してえられる状態方程式と種々の制約を付加した評価関数を構成すれば、地下水の最適取水問題が線形計画法や最大原理の問題に帰着できるということがわかった。　これからは、井戸以外の任意の場所での地下水位の制限、さらには、時間とともに境界条件が変化する場合，地下水場での拡散問題における有効な拡散を促す地下水場管理，指定された境界条件をもつ地下水場において有効な揚水をえるための井戸配置問題などを最適制御問題として定式化したいと考えている。

参考文献

○米谷栄二編：土木計画便覧（土木計画手法）　丸善