Ⅳ—18　　Galerkin法による地下水拡散の解について

九州大学　工学部　正員　神野　健二
○　同　学生員　橋原　正博
同　正員　上田　年比古

## Ⅰ．まえがき

本報ではGalerkin法を用いて2次元移流分散方程式を数値計算する場合の解の安定性につき、2．3考察したものである。既に1次元の場合については、空間座標を有限要素法にて一定の格子間隔で分割し、連立方程式をFourier変換することにより増幅因子を求め安定性につき検討されているが[1]。地下水場における分散問題は広域的な2次元問題でありかつ井戸による取水が絶えず行なわれているので2次元の移流分散方程式を対象として安定性が論じられねばならないと考え、ここでは有限要素法によって任意に空間的に離散化された各節点濃度に関する線形連立常微分方程式の係数行列の固有値につき考察した。

## Ⅱ．Galerkin法による定式化について

2次元の移流分散方程式は井戸による取水・注水を考慮するとつぎのように表わした方が合理的と考えられる。すなわち、取水の場合には濃度をもった地下水を汲みあげる場合であるので，取水量を$Q_0(>0)$とすれば

$$\partial c/\partial t+(u/\lambda)\partial c/\partial x+(v/\lambda)\partial c/\partial y-\partial/\partial x(D_x\partial c/\partial x)-\partial/\partial y(D_y\partial c/\partial y)+Q_0 c\cdot\delta(x-\xi)(y-\eta)=0 \quad \text{—}(1)$$

また注水の場合には、注水濃度を$C_0$とし

$$\partial c/\partial t+(u/\lambda)\partial c/\partial x+(v/\lambda)\partial c/\partial y-\partial/\partial x(D_x\partial c/\partial x)-\partial/\partial y(D_y\partial c/\partial y)-Q_0 C_0\delta(x-\xi')(y-\eta')=0 \quad \text{—}(2)$$

と表わせよう。ここに$\lambda$は空げき率、$u$・$v$は流速，$D_x$ $D_y$は$x$・$y$方向の分散係数，$\delta$は$\delta$関数，$(\xi,\eta)$および$(\xi',\eta')$は取水および注水井戸の$x$，$y$座標である。またLを微分演算子；$L=\partial/\partial t+(u/\lambda)\partial/\partial x+(v/\lambda)\partial/\partial y-\partial/\partial x(D_x\partial/\partial x)-\partial/\partial y(D_y\partial/\partial y)$ (3) としておく。また、未知関数$C(x,y,t)$を既知関数系$\varphi_k(x,y)$により次のように近似し展開する。

$$C(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}C_k(t)\varphi_k(x,y) \quad \text{———}(4)$$

Galerkin法では式(4)を式(1)および式(2)に代入した場合に生じる残差；式(1)の場合には

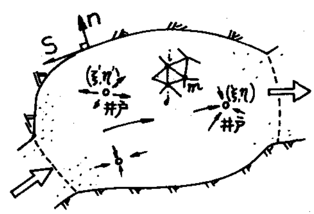
$$R[x,y;C,\varphi]=L[C_k(t)\varphi_k(x,y)]+Q_0C_k(t)\varphi_k(x,y)\delta(x-\xi)(y-\eta) \quad \text{—}(5)$$

また式(2)の場合には

$$R[x,y;C\,\varphi]=L[C_k(t)\varphi_k(x,y)]-Q_0C_0\delta(x-\xi')(y-\eta') \quad \text{———}(6)$$

を展開関数系$\varphi_i$と直交させるものである，すなわち、

$$\int_D R[x,y;C,\varphi]\varphi_i\,dD=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \quad \text{———}(7)$$



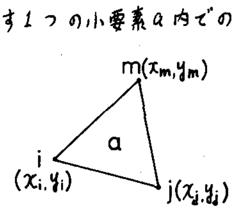

（地下水場）　図－1

式(7)は$n$個の未定係数$C_k(t)$についての$n$個の連立1次方程式で、これより$C_k(t)$を決定できる，さて有限要素法では領域を任意の大きさと形とをもつ三角形で分割し次式のような展開関数系を用いるのが普通である。いま図－2に示す1つの小要素$a$内での濃度分布$C^a$を

$$C^a(x,y,t)=C_i(t)\varphi_i(x,y)+C_j(t)\varphi_j(x,y)+C_m(t)\varphi_m(x,y) \quad \text{———}(8)$$

ここに　$\varphi_i(x,y)=(a_i+b_ix+c_iy)/2\Delta_a$，　$\Delta_a$は三角形の面積，

$a_i=(x_jy_m-x_my_j)$，$b_i=y_j-y_m$，$c_i=x_m-x_j$　・・・などである。




図－2

また要素内での時間的な濃度変化$\partial/\partial t[C^a(x,y,t)]$も、同様にして

$$\dot{C}^a(x,y,t)=\dot{C}_i(t)\varphi_i(x,y)+\dot{C}_j(t)\varphi_j(x,y)+\dot{C}_m(t)\varphi_m(x,y) \quad \text{———}(9)$$

式(8)，(9)を式(5)あるいは式(6)に代入し残差を求め$\varphi_i$と直交させると，式(5)を用いる場合には

$$C_k\iint_{\Delta a}\{\varphi_i\partial/\partial x(D_x\partial\varphi_k/\partial x)+\varphi_i\partial/\partial y(D_y\partial\varphi_k/\partial y)-Q_0\varphi_i\varphi_k\delta(x-\xi)(y-\eta)-(u/\lambda\,\varphi_i\partial\varphi_k/\partial x+v/\lambda\,\varphi_i\partial\varphi_k/\partial y)\}dxdy$$
$$-\dot{C}_k\iint_{\Delta a}\varphi_i\varphi_k\,dxdy=0 \quad \text{———}(10)$$

また式(6)の場合には $C_k\iint_{\Delta a}\{\varphi_i\,\partial/\partial x(D_x\,\partial\varphi_k/\partial x)+\varphi_i\,\partial/\partial y(D_y\,\partial\varphi_k/\partial y)-(u/\lambda\,\varphi_i\,\partial\varphi_k/\partial x+v/\lambda\,\varphi_i\,\partial\varphi_k/\partial y)\}dxdy$

$$-\dot{C}_k\iint_{\Delta a}\varphi_i\varphi_k\,dxdy+Q_0C_0\iint_{\Delta a}\varphi_i\,\delta(x-\xi')(y-\eta')\,dxdy=0 \quad (11)$$

となる。(なお、式(10),(11)で添字 $k$ については $k=i,j,m$ について総和をとるものとする。)

式(10)あるいは式(11)では2階偏微分の項 $\partial^2\varphi_k/\partial x^2$, $\partial^2\varphi_k/\partial y^2$ が含まれ、$\varphi_k$ は1次関数で近似しているので、2階微分まで表現できないために、$\varphi_i\,\partial/\partial x(D_x\,\partial\varphi_k/\partial x)=\partial/\partial x(D_x\,\partial\varphi_k/\partial x\cdot\varphi_i)-D_x\,\partial\varphi_k/\partial x\cdot\partial\varphi_i/\partial x$ と変形し、発散定理を用いればたとえば式(10)の場合には

$$C_k\iint_{\Delta a}\{D_x\,\partial\varphi_k/\partial x\cdot\partial\varphi_i/\partial x+D_y\,\partial\varphi_k/\partial x\cdot\partial\varphi_i/\partial x+u/\lambda\,\varphi_i\,\partial\varphi_k/\partial x+v/\lambda\,\varphi_i\,\partial\varphi_k/\partial y+Q_0\,\varphi_i\varphi_k\,\delta(x-\xi)(y-\eta)\}dxdy$$

$$+\dot{C}_k\iint_{\Delta a}\varphi_i\varphi_k\,dxdy=C_k\int_S(D_x\,\partial\varphi_k/\partial x\,\varphi_i n_x+D_y\,\partial\varphi_k/\partial y\,\varphi_i n_y)\,dS \quad (12)$$

と変形される。なお上式中の流速 $u, v$ についても同様に有限要素法により求めるものとする。以上により各節点濃度を未知数とする連立常微分方程式が次式のようにえられる。 $[M]\dot{\mathbb{C}}+[K]\mathbb{C}=[F]$ ―― (13)

あるいは変形して、 $\dot{\mathbb{C}}=\mathbb{A}\mathbb{C}+\mathbb{B}$ ―― (14) ここに $\mathbb{A}=-[M]^{-1}[K]$、 $\mathbb{B}=[M]^{-1}[F]$ である。

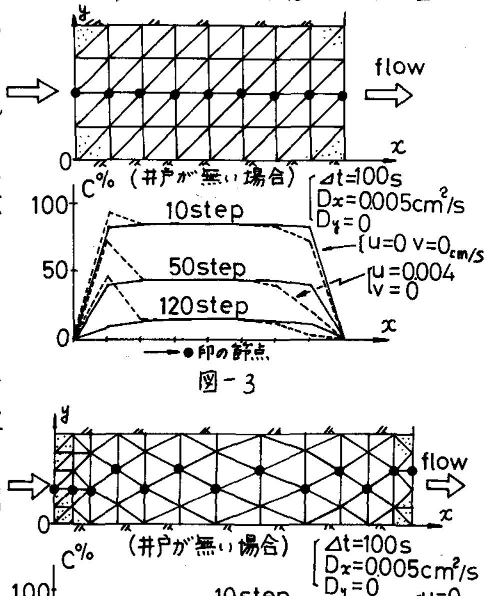
以上により地下水場における移流分散方程式をGalerkin法により離散化したが、井戸地点は数学的には特異点と考えられ、厳密には河野氏[2)]がポテンシャル分布を求める際に考慮したようなことを検討せねばならない。

## Ⅲ. 連立常微分方程式について

線形の連立常微分方程式の安定、不安定性は周知のように式(14)の係数行列 $\mathbb{A}$ の固有値を調べることによってわかる。移流分散方程式は双曲型と放物型の性質をもつので係数行列 $\mathbb{A}$ にもその影響が現われている。移流項がない場合には係数行列は実対称行列となり、実数の固有値をもちしかも分割の仕方にあまり関係なく負の固有値となるようである。実際図－3、図－4には井戸がない場合の矩形領域内の拡散を計算したがいずれも負であった。したがって連立常微分方程式をたとえばCrank-Nicolson差分法で漸化式に書きなおした場合の増幅因子 $\mu_j$；

$\mu_j=(1+P_j\Delta t/2)/(1-P_j\Delta t/2)$，(ここに $P_j$ は連立常微分方程式の $j$ 番目の固有値、また $\Delta t$ は時間間隔)は $P_j$ が負または0であれば必ず $|\mu_j|\leq 1$ であり安定となる。[3)]

つぎに移流項がある場合にはもはや係数行列 $\mathbb{A}$ は対称行列ではなくなり、また固有値の中には複素数が含まれる。この場合も固有値の実数部が負でなければ解は発散する。図－3，図－4で流速を与えて計算すると流速が大きくなるにつれ固有値の虚数部も大きくなるようであり、そのため解が振動してくる。また図－3と図－4では入口，出口付近および領域内部での分割の仕方が異なっているので濃度の初期分布の近似も異なってくる。




図－3


図－4

## Ⅳ. むすび

本報では移流分散方程式をGalerkin法で空間的に離散化し節点濃度に関する連立常微分方程式の係数行列の固有値の実数部を調べることにより連立方程式が安定か否かの判定を行なう方法をとった。今後は井戸近傍の処理法を検討し実際の場合に応用したいと考えている。


参考文献：1)村岡，中辻；有限要素法による非定常拡散解析について，第18回水理講演集　2)Ichiro Kono; The Equivalent Radius of a Source in Numerical Model of Groundwater Flow, PROC. OF JSCE, No. 218, OCT. 1973
3) G.ストラング・G.J.フィックス；有限要素法の理論，P262，培風館