

九州大学工学部 正員 橋本 武
 学生員 〇揚 勲得

1. まえがき ときに著者らは、等方透水性地山や堤体内の不圧湧水・浸透流問題を、有限要素法あるいは還元有限要素法における湧出点仮定法により解析するさいに用うべき湧出点推定法を提案した¹⁾。すなわち、湧出点およびその近傍の自由水面形が擬似放物線で近似できるという性質を利用して、湧出点を推定するものである。しかし、一般的な異方透水性地山の湧水・浸透流は、そのままでは湧出点およびその近傍の自由水面形を擬似放物線とみなすことができず、したがって、著者らの湧出点推定法を直接活用することができないことになる。ここでは、直交異方透水性地山を対象に前論文の応用拡張を行い、著者らの湧出点推定法の応用を可能にせんとするものである。

2. 直交異方透水性地山の等方化変換 直交異方透水性地山の透水性主軸方向の透水係数を k_x, k_y とし、 k_x 方向と水平軸とのなす角度を ϕ と記号表示する。湧水・浸透流問題を、有限要素法または還元有限要素法により自由水面および湧出点を仮定しながら試算的に解析するが、反復計算の第I-1回目の仮定湧出点 P_{I-1} および仮定自由水面の2点を1', 2'とし、これらを用いて新たな自由水面上の点1'', 2''が算出されているものとする(図-1)。前述のように、この点1'', 2''は擬似放物線上の点とみなすことができないから、この点1'', 2''を適当に修正して擬似放物線上の点としなければならない。このため、直交異方透水性地山の等方化変換手法を用いることにする。

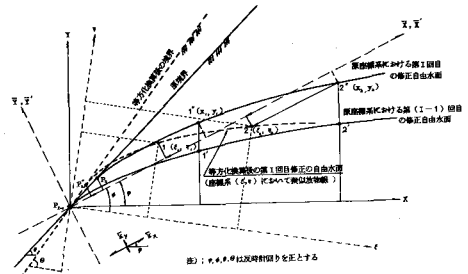


図-1

湧水・浸透流問題の支配方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) - q = 0 \quad \text{である。}$$

ここに、 H :水ポテンシャル q :発生湧出量

この式において (x, y) を $(\bar{x}, \bar{y})$ とすれば等方化換算できる

ことは周知のとおりである。図-1に例示するように、 P_{I-1} を原点とし、

透水性主軸と一致する座標系 $(\bar{x}, \bar{y})$ を導入し、等方化換算すれば、図-1の実線に示す自由水面形が点線のように修正され、擬似放物線近似が可能になる。原座標系における任意点 (x, y) を $(\bar{x}, \bar{y})$ 座標系に変換後、 $\bar{x}$ を $\bar{x} = \bar{x} \sqrt{k_y/k_x}$ 倍すれば次の変換公式がえられる(図-2参照)。

$$\bar{x}' = T' \bar{x} \quad (1) \quad \text{ここに、} \bar{x}' = [\bar{x}' \quad \bar{y}']^T$$

つぎに、原座標系の水平軸 x について同様の変換を行えば、図-2の ξ 軸となるが、この ξ 軸と $\bar{x}$ 軸とのなす角度を ϕ とすれば、 x 軸上の任意点 x の式(1)による座標変換は

$$\bar{x} = \bar{x} \cos \phi, \quad \bar{y} = -\bar{x} \sin \phi$$

よって

$$\tan \phi = \frac{-\bar{x} \sin \phi}{\bar{x} \cos \phi} = -\frac{1}{k} \tan \phi, \quad \therefore \phi = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{k} \tan \phi \right) \quad (2)$$

等方化変換後の自由水面形が擬似放物線とみなしうるのは、この水平軸 x の変換軸 ξ に対してである。 ξ 軸と、これに直交する η 軸とで構成される座標系 (ξ, η) に対する $\bar{x}'$ の変換式を求めれば

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{Bmatrix} = T_1 \bar{x}'$$

上式に式(1)を代入すれば次の変換公式がえられることになる。

$$\xi = TX \quad (3) \quad \text{ここに, } \xi^T = [\xi \quad \eta]$$

$$T = T_1 T' = \begin{bmatrix} K \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & K \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \\ -K \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & -K \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix}$$

また、逆変換公式は次のとおりである。

$$X = T^{-1} \xi \quad (4)$$

$$T^{-1} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} -K \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & -K \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ K \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi & K \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \end{bmatrix}$$

式(3)の座標変換は、自由水面上の点について行くとともに、湧出点が存在する地山の境界についても行う。いま、原境界の x 軸上に対する傾きを θ とし、変換境界の ξ 軸に対する傾きを Θ とする。このとき、原境界上の任意点 (x, y) に関して、 $y = x \tan \theta$ なる関係があるから、これを式(3)に代入すれば、変換境界上の点 (ξ, η) が次のようにえられる。

$$\xi = \{K \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + (K \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \tan \theta\} x$$

$$\eta = \{-K \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi + (-K \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \tan \theta\} x$$

よって、変換境界の ξ 軸に対する傾き Θ が次のように算定できることになる。

$$\Theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{-K \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi + (-K \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \tan \theta}{K \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + (K \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \tan \theta} \right\} \quad (5)$$

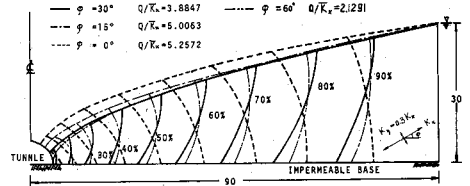


図-3

式(3)を用いることにより、直交異方透水性地山が等方化変換されるから、以後は前論文¹⁾に展開する概念を用いることにより新しい湧出点が次のように推定できることになる。まず、第1回目の反復計算によりえられた湧出点近傍の自由水面上の2点の座標値 (x_i, y_i) ($i=1, 2$)を式(3)により座標変換し、 (ξ_i, η_i) を求める。また、境界の傾きに関して式(5)を計算する。④の傾き Θ が $\Theta \leq 70^\circ$ の場合、

(a) $\Theta \leq 70^\circ$ の場合

$$\xi_2 = \eta_1^* / (\eta_1^* / \xi_1^* + \tan \Theta) \quad \eta_2 = \xi_2 \tan \Theta \quad (6)$$

$$\text{ここに, } \xi_1^* = \xi_1 - \frac{1}{2\eta_1} (\eta_1 + 2\eta_2) \eta_1 \cot \Theta, \quad \xi_2^* = \frac{(\xi_1 + \xi_2)/2}{(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_2 - \eta_1})^2 \tan^2 \Theta - 1}$$

$$\eta_1^* = \eta_1 - 2\sqrt{\xi_2} (\sqrt{\xi_1 + \xi_2} - \sqrt{\xi_2}) \tan \Theta, \quad \eta_2^* = \frac{(\eta_1 + \eta_2)/2}{(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_2 - \eta_1}) \tan \Theta - 1}$$

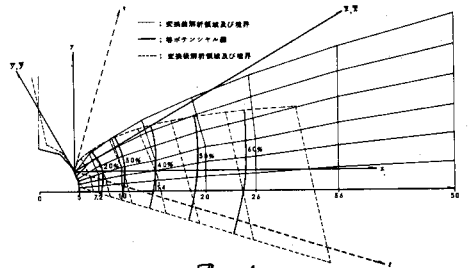


図-4

(b) $\Theta \geq 70^\circ$ の場合

$$\text{ここに, } \xi_2 = \frac{\xi_1 \eta_2^2 - \xi_2 \eta_1^2}{\eta_2^2 - \eta_1^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \eta_1 / (\eta_1 / \xi_1 + \tan \Theta) \\ \eta_2 &= \xi_2 \tan \Theta \end{aligned} \right\} (7) \quad \eta_2^* = (\sqrt{\xi_2} \eta_1 - \sqrt{\xi_1} \eta_2) / (\sqrt{\xi_2} - \sqrt{\xi_1})$$

式(6) または式(7) から算出される (ξ_2, η_2) は、図-1に示す点 P_2^* であり、これを式(4)に代入すれば、原座標系における推定湧出点 P_2^* がえられ、第1回目の解析領域が定まることになる。

4. 適用例 水平軸と $\varphi=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ 及び 60° の傾きをなす方向およびその直角方向に透水性の2主軸をもち、かつ $\bar{\alpha}_x = \bar{\alpha}_y = 1:0.3$ なるトンネル地山に関して、

表-1

ξ_i	η_i		$\frac{(2\eta_i - \eta_1)}{\eta_1} \times 100$ (%)
	計算結果	計算結果	
2.893	4.846	4.954	2.2
5.829	6.930	7.031	1.5
9.452	8.974	8.954	0.2
15.351	11.706	11.410	2.5
23.334	14.711	14.068	4.3

還元有限要素法を適用し、その際湧出点推定法として、本法を用いれば図-3の結果がえられる。湧出点に関して、収束判定値を $|H_2^{(i-1)} - H_2^{(i)}| / |H_2^{(i)}| \leq 0.04$ とすると、反復回数10回で収束し、この間 CPU TIME は 3.8 Sec (FACOM 230-75) であった。なお、同じ節点数で等方性トンネル地山に関する同様の問題では湧出点の収束判定値を $|H_2^{(i-1)} - H_2^{(i)}| / |H_2^{(i)}| \leq 0.01$ とすると、反復回数も10回で収束し、CPU TIME 3 sec である。湧出点およびその近傍の自由水面と等ポテンシャル線に関して、等方性換算後は点線のようになる。この等方性換算後の点線領域に原座標系に対応する点のポテンシャルを用いて、等ポテンシャル線を描けば等方性地山の場合の等ポテンシャル線がえられる(図中実線)。また、湧出点を原点とし、原座標系に隣接する自由水面上の2点の座標を用いて、放物線式 $\eta^2 = \alpha \xi$ における定数を決定すれば $\alpha = 8.481$ となる。この放物線を延長して、2点以外の各点の ξ_i の値に対する η_i を求めれば表-1に示すとおりである。これより、湧出点よりも相当離れた位置でも放物線式によくのることかわかる。参考文献 橋本 武, 橋本 武, 松隈 宣明: 不圧流れの湧出点推定法 第4巻 第4号