

九州大学工学部 正会員 樽 木 武
九州大学工学部 学生員 〇田 代 幸 英

1. はじめに

近年、トンネル建設の需要増大に伴ない、軟弱地山内に掘削する例が多くみられる。この場合掘削後の地山の変形や覆工施工後の土圧を適切に予測することが重要であることはいうまでもないが、土圧は掘削後ただちに生ずるものではなく、時間とともに変化し、したがってレオロジーの立場からこの力学問題を解明せねばならない。そこで、著者等は地山をフォートモデルとバネとを直列に継いだ3要素モデルから成立つ粘弾性体と仮定して、応力-ひずみ関係式を導き、覆工に作用する土圧の変化を考察せんとするものである。

2. 応力-ひずみ関係式の誘導

粘弾性体の応力-ひずみ関係が図-1に示す3要素モデルにより与えられる場合には、応力とひずみとの関係が補助変数 h を用いて一階の連立微分方程式系で表わされる。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{gg} & B_{gh} \\ B_{hg} & B_{hh} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_{gg} & C_{gh} \\ C_{hg} & C_{hh} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{h} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 $[B]$: バネ1, 2のバネ定数で構成される係数マトリックス。

$[C]$: ダッシュポットの粘性係数で構成される係数マトリックス。

・は時間微分を表わす。

ここである時間区間 $[t_{I-1}, t_I]$ を考え、時刻 t_I における応力、ひずみを σ_I, ε_I と表示する。

この時間区間 $[t_{I-1}, t_I]$ における任意の時刻 t の応力、ひずみは、近似的に次の直線式で仮定することができる。

$$\sigma = \sigma_{I-1} + \frac{t - t_{I-1}}{\Delta t} (\sigma_I - \sigma_{I-1}), \quad \varepsilon = \varepsilon_{I-1} + \frac{t - t_{I-1}}{\Delta t} (\varepsilon_I - \varepsilon_{I-1}) \quad (2)$$

上式を式(1)に代入し、時間区間 $[t_{I-1}, t_I]$ で積分すれば式(3)が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I + \sigma_{I-1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{gg} & B_{gh} \\ B_{hg} & B_{hh} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_I + \varepsilon_{I-1} \\ h_I + h_{I-1} \end{Bmatrix} + \frac{2}{\Delta t} \begin{Bmatrix} C_{gg} & C_{gh} \\ C_{hg} & C_{hh} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_I - \varepsilon_{I-1} \\ h_I - h_{I-1} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式(3)を整理すると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I + \sigma_{I-1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{gg} & K_{gh} \\ K_{hg} & K_{hh} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_I \\ h_I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_{gg} & H_{gh} \\ H_{hg} & H_{hh} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{I-1} \\ h_{I-1} \end{Bmatrix} \quad (4) \quad \text{ただし、} \quad K_{gg} = B_{gg} + \frac{2}{\Delta t} C_{gg}, H_{gg} = B_{gg} - \frac{2}{\Delta t} C_{gg} \text{ etc.}$$

式(4)の第2式から h_I を求め、ついでこれを第1式に代入のうえ、演算整理すれば次式が得られる。

$$\sigma_I = (K_{gg} - K_{gh} K_{hh}^{-1} K_{hg}) \varepsilon_I + (H_{gg} - K_{gh} K_{hh}^{-1} H_{hg}) \varepsilon_{I-1} + (H_{gh} - K_{gh} K_{hh}^{-1} H_{hh}) h_{I-1} - \sigma_{I-1} \quad (5)$$

$$h_I = -K_{hh}^{-1} K_{hg} \varepsilon_I - K_{hh}^{-1} H_{hg} \varepsilon_{I-1} - K_{hh}^{-1} H_{hh} h_{I-1} \quad (6)$$

ここで式(5)を改めて次のように書く。

$$\sigma = D \cdot \varepsilon - \sigma_0 \quad (7) \quad \text{ただし、} \quad \sigma_0 = -(H_{gg} - K_{gh} K_{hh}^{-1} H_{hg}) \varepsilon_{I-1} - (H_{gh} - K_{gh} K_{hh}^{-1} H_{hh}) h_{I-1} + \sigma_{I-1}$$

ところで平面ひずみ状態に対して式(1)を成分表示すれば、偏差成分に関して次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_m \\ \sigma_y - \sigma_m \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2G^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G^0 & 0 \\ 0 & 0 & G^0 \\ 2G^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G^0 & 0 \\ 0 & 0 & G^0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m \\ \varepsilon_y - \varepsilon_m \\ \gamma_{xy} \\ h_x - h_m \\ h_y - h_m \\ h_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2C^0 \\ 0 \\ C^0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_m \\ \dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_m \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{h}_x - \dot{h}_m \\ \dot{h}_y - \dot{h}_m \\ \dot{h}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここに G, C はせん断弾性係数およびせん断粘性係数で、また
 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$
 $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$
 $h_m = \frac{1}{3}(h_x + h_y)$

また、体積成分に関しては次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_m \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3K^0 & -3K^0 \\ -3K^0 & 3K^0 + 3K^0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ h_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3H^0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_m \\ \dot{h}_m \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここに K, H は体積弾性係数および体積粘性係数である。

式(8), (9)より式(7)を導くと、本題解析の基礎となる次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{x0} \\ h_{y0} \\ h_{xy0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (10) \quad \text{ただし、添字0は式(5)における添字1-1} \\ \text{に対応するものである。}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} D_{11} &= \frac{K^0 \cdot 2K^0 + G^0 \Delta t}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} + \frac{4}{3} \frac{G^0 \cdot 2G^0 + 2G^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, D_{12} = \frac{K^0 \cdot 2K^0 + G^0 \Delta t}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} - \frac{2}{3} \frac{G^0 \cdot 2G^0 + 2G^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, D_{22} = D_{11}, D_{21} = D_{12}, D_{33} = \frac{G^0 \cdot 2G^0 + 2G^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t} \\ E_{11} &= \frac{4K^0 + H^0 \Delta t}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} + \frac{16}{3} \frac{G^0 \cdot 2G^0 + 2G^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, E_{12} = \frac{4K^0 + H^0 \Delta t}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} - \frac{8}{3} \frac{G^0 \cdot 2G^0 + 2G^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, E_{22} = E_{11}, E_{21} = E_{12}, E_{33} = \frac{4G^0 \cdot 2G^0 + 2G^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t} \end{aligned}$$

同様に式(6)に示す \$h\$ を求めると

$$\begin{Bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{x0} \\ h_{y0} \\ h_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} F_{11} &= \frac{1}{3} \frac{K^0}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} + \frac{2}{3} \frac{G^0}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, F_{12} = \frac{1}{3} \frac{K^0}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} - \frac{1}{3} \frac{G^0}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, F_{22} = F_{11}, F_{21} = F_{12}, F_{33} = \frac{G^0}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t} \\ G_{11} &= \frac{1}{3} \frac{K^0 + K^0 - 2H^0 \Delta t}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} + \frac{2}{3} \frac{G^0 + G^0 - 2C^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, G_{12} = \frac{1}{3} \frac{K^0 + K^0 - 2H^0 \Delta t}{K^0 + K^0 + 2H^0 \Delta t} - \frac{1}{3} \frac{G^0 + G^0 - 2C^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t}, G_{22} = G_{11}, G_{21} = G_{12}, G_{33} = \frac{G^0 + G^0 - 2C^0 \Delta t}{G^0 + G^0 + 2C^0 \Delta t} \end{aligned}$$

3. 解析方法

粘弾性体の解析には、荷重が与えられてそれに対する変位を求める荷重境界値問題と、変位が与えられてこれに釣合うべき力を求める変位境界値問題がある。本研究では、対象とする地山と覆工を有限個の要素に分割し、式(10)を解析の基本式として、外力荷重 \$P\$、初期外力 \$P_0\$、物体力 \$q\$ を与え、\$\Delta t\$ 時間後の変位 \$v\$ を求め、これによってひずみ \$\varepsilon\$、内部ひずみ \$h\$、応力 \$\sigma\$ を求めることとし、さらに \$h\$ より次の時間区分の初期値 \$h_0\$ を設定して順次同様な操作を繰返すものとした。

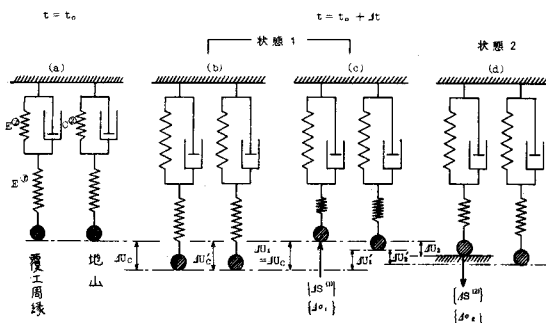


図-2

$$K \cdot v = P + P_0 + \int_0^t A \cdot f \, dV \quad (12) \quad \text{ただし、} A: \text{節点変位と要素内変位との変換マトリックス}$$

また、トンネルは全断面掘削で、トンネル掘削直前では地山のフリー挙動は収束し、安定な1次応力状態にあるものとし、掘削をこの初期応力の解放ということで表す。覆工施工後の解析は図-2に示すような状態1、2の計算を繰返すものである。すなわち、

状態1：トンネル掘削により地山各部は弾性変形を起こし、さらにクリープ変形を生ずる。\$t=t_0\$ 時に覆工を巻くものとし、覆工のない状態で \$t=t_0+\Delta t\$ まで応力一定のまま自由にクリープさせ、トンネル周縁部およびそれ以外の地山の \$\Delta t\$ 時間に生ずるクリープ変位 \$\Delta U_1\$、\$\Delta U_1'\$ を求める (b)。続いて (c) のように \$\Delta U_1\$ を完全に阻止する状態を考え、この阻止に必要なトンネル周縁部にかかる拘束節点力 \$\Delta S^{(1)}\$ を算定し、この場合の応力 \$\Delta \sigma_1\$ を求める。

状態2：覆工が巻かれた状態を考え、覆工と地山を1つの系とする。状態1で求めた節点力 \$\Delta S^{(1)}\$ と大きさが同じで逆方向の外力 \$\Delta S^{(2)}\$ を覆工部に作用させて拘束を解く。そしてこの時の覆工周縁およびそれ以外の地山の变位 \$\Delta U_2\$、\$\Delta U_2'\$、応力 \$\Delta \sigma_2\$ を算定する。

以上の方法によりトンネル周縁部のフリー変位が阻止されることから後荷が発生するが、この状態は図の状態1と状態2との和で求められる。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{地山} \quad \text{覆工周縁} \quad \Delta U &= \Delta U_2, & \Delta \sigma &= \Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 & \text{覆工} \\ \text{上記以外} \quad \Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_1' + \Delta U_2', & \Delta \sigma &= \Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 & \Delta U = \Delta U_2, \Delta \sigma = \Delta \sigma_2 \end{aligned}$$

次に \$t=t_0+\Delta t\$ において、\$(-\Delta S^{(1)})\$ をトンネル周縁部にかけて荷重レベルを \$(P-\Delta S^{(1)})\$ にして覆工をはずし、\$t_0+\Delta t\$ の状態を次の時間区分の初期状態として計算することになる。

なお、解析結果は、紙面の都合により講演時に発表する。

参考文献 1) O.C. マンキン・ヴィッツ/ Y.K. チュン: マトリックス有限要素法, 1970, PP249~289, 培風館

2) 堀井健一郎・原睦人: 有限要素法による粘弾性体の解析法, 土木学会論文報告集 NO.179, 1970.7, PP23~35