II—10　　弾性状態から塑性状態への連続的な移行過程および軟化現象の表現

九大・農　橋口公一

従来、材料は応力がある値（降伏応力）に達するまでは塑性変形を生じないとして、弾性状態の存在が仮定された。この理想化は2個の剛体の相互スベリに関するCoulombの概念を粒子の集合体としての一般材料へ単純に拡張したものであろう。しかし、粒子集合体においては、（たとえ粒子が剛体で、かつ、それらの間にCoulombのマサツ則が成り立つとしても）、いかに低い応力状態においても無数の粒子間にはスベリ条件を満たす接触が発生し、集合体総体としての塑性変形を生じると考えるのが自然であろう。つまり、従来の弾性状態と塑性状態の明確な分離を否定し、これらの滑らかな移行過程を考慮した構成式を見い出してゆくことが今後の大きな課題の一つであろう。このことは、とくに軟化現象を生じる粒状体においては極めて重要な意味を持ってくるが、以下にこのような事実を反映した具体的な構成式を規定してみる。

さて、次の亜弾性体の構成式を考える。

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\sigma_{mn})D_{kl} \tag{1}$$

ここに、

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{\sigma}_{ij} = D\sigma_{ij}/Dt - W_{im}\sigma_{mj} + \sigma_{im}W_{mj}\text{：共回転応力テンソル，}\ D/Dt\text{：物質導関数，} \\ u_i\text{：変位，}\ Du_i/Dt\text{：速度，} \\ D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\text{：ストレッチング，}\ W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\text{：スピンテンソル} \end{array}\right\} \tag{2}$$

以下に、C_{ijkl}を具体的に決定する。まず、D_{ij}の一部は材料の履歴に無関係に応力および応力増分のみで決まるとし、これを弾性ストレッチングと称し、D^E_{ij}と記すことにする。すなわち

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\sigma_{mn})D^E_{ij} \tag{3}$$

とする。ここに、E_{ijkl}は応力の関数で4階のテンソルを形成する。さらに

$$D_{ij} = D^E_{ij} + D^p_{ij} \tag{4}$$

が成り立つとして、D^p_{ij}を塑性ストレッチングと称することにする。

次に、σ_{ij}と内部状態変数 $U^a\ (a=1, \cdots, n)$ の関数 f により規定される降伏条件式

$$f(\sigma_{ij}, U^a) = 0 \tag{5}$$

を考える。ここで、DU^α/Dt は塑性ストレッチングの線型関数すなわち

$$DU^a/Dt = \psi^a_{mn}(\sigma_{ij}, U^b)D^p_{mn} \tag{6}$$

で与えられると仮定する。さらに、associated flow rule

$$D^p_{ij} = \lambda\,\partial f/\partial\sigma_{ij}\quad(\lambda\text{：正値のスカラ・パラメータ}) \tag{7}$$

が成り立つと仮定すれば、(5)および(7)より

$$D^p_{ij} = -\bar{G}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{rs}}\frac{D\sigma_{rs}}{Dt}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}},\quad \bar{G} = -\frac{1}{\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial U^a}\psi^a_{mn}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}} \tag{8}$$

を得る。なお、$D\sigma_{ij}/Dt = \overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ である。

ところで、実際には

$$f(\sigma_{ij}, U^a) < 0 \tag{9}$$

なる下降伏状態においても、$D^p_{ij} \neq 0$であると考えるべきであろう。そこで、パラメータ

$$\mathcal{F} = 1 - f/f_0\quad(0 \leqq \mathcal{F} \leqq 1),\quad f_0 = f(0, U^a) \tag{10}$$

を導入して、下降伏状態におけるD^p_{ij}の発生率を考慮して$\bar{G}$を本状態へ拡張したものを$\tilde{\bar{G}}$とおけば

$$D^p_{ij} = \tilde{\bar{G}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{rs}} \overset{\circ}{\sigma}_{rs} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \tag{11}$$

であり、$\tilde{\bar{G}}$は例えば$\mathcal{K}$および$\mathcal{H}$を$\mathcal{F}$の関数として

$$\tilde{\bar{G}} = - \frac{\mathcal{K}}{\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^a} \left(\psi^a_{mn} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{mn}} + \mathcal{H}^a \right)} \tag{12}$$

で与えられる。なお、$\mathcal{K}$および$\mathcal{H}$は$\mathcal{F}=1$に対して$\mathcal{K}=1$, $\mathcal{H}=0$の条件を満たさねばならない。

式(11)に対して、式(1)におけるC_{ijkl}は

$$C_{ijkl} = E_{ijkl} - E_{ijrs} \frac{E_{pqkl} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{pq}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{rs}}}{\frac{1}{\tilde{\bar{G}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{tu}} E_{tumn} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{mn}}} \tag{13}$$

で与えられる。

さて、以下では、$\mathcal{F}$が内部状態変数として塑性体積ひずみ$\int D^p_{ij}\delta_{ij}$のみを含み，かつ、応力のみの関数fおよび$\int D^p_{ij}\delta_{ij}$のみの関数Fに分離しうる場合について考える。すなわち、

$$\mathcal{F} = f(\sigma_{ij}) - F\left(\int D^p_{ij}\delta_{ij}\right) = 0 \tag{14}$$

本場合には、$\mathcal{F} = f/F$となり、D^p_{ij}は

$$D^p_{ij} = \tilde{G}\, df \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad \tilde{G} = \frac{\mathcal{K}}{\frac{dF}{d\int D^p_{ij}\delta_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \mathcal{H} \right)} \tag{15}$$

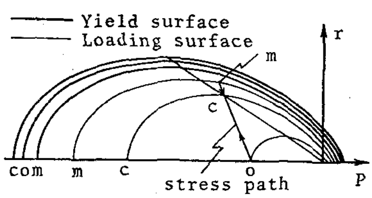
で与えられる。

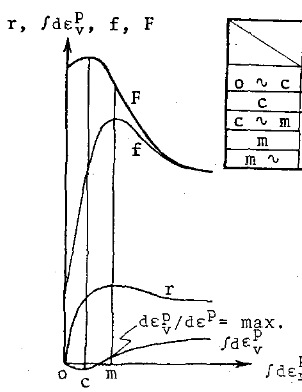
式(15)は、以下に述べるように、興味深い特性を示す。

i) 右図のように、$\partial f/\partial p=0$が満たされるまでは、fおよびFの増大（塑性的体積減少）が増大して、わずかな塑性変形が生じる。ii) $\partial f/\partial p=0$から$\partial f/\partial p-\mathcal{H}=0$までは、$f$の増大および$F$の減少（塑性的体積膨張）によりかなりの塑性変形が生じる。iii) $\partial f/\partial p-\mathcal{H}=0$において$f$はその最大値に達する。iv) さらに塑性変形が進行すれば、fおよびFは共に減少して critical state に向って互いに限りなく近づいてゆく。

ここでの関数$\mathcal{H}$の重要な役割が注目される。もし、式(15)がこれを含まないとすれば、いかに低い応力状態においても$\partial f/\partial p=0$になれば、無制限な塑性偏差ひずみが生じ、応力はこの状態を越え得ないという矛盾を生じる。したがって、式(15)は$\mathcal{H}$を必然的に含むことになる。

なお、負荷面の軟化部分は構成式の表現上、現われる仮想の曲面である。これは、従来、Coulomb-Mohr 則で表わされていたようないわゆる降伏曲面ではなく、滑らかな膨らみを有する曲面であり、むしろ、塑性ポテンシャル面と考えるべきであり、本面に対する重要な物理的意味を提供するものであろう。





	$\frac{\partial f}{\partial p}$	$\frac{\partial f}{\partial p} - \mathcal{H}$
o ～ c	< 0	< 0
c	= 0	
c ～ m	> 0	
m		= 0
m ～		> 0

構成式(15)による連続的な弾、塑性移行過程および軟化現象の解釈