II—8　　無次元数を用いた最適設計

熊本大学工学部　正員　三池亮次
同　上　正員　○小林一郎

1．要旨　無次元数を用いた、剛結構造の最適設計の定式化を試みたものである。

2．剛結構造に現われる無次元数と最適設計　流体力学におけるReynolds数とかFroude数のような、適切な無次元数は、弾性力学においても存在する。密度ρ，長さl，断面積A，速度$\dot{u}$，分布荷重pの特性値を，ρ_0，l_0，A_0，$\dot{u}_0$，p_0のように添字$_0$をもって表わすと，変位uの無次元数u^*の一般的表現は$u^*=(\rho_0\dot{u}_0^2/p_0)(u/l_0)$である。ここに$(\rho_0\dot{u}_0^2)/p_0$は、いわゆるEuler数であって、弾性体の場合には、応力σの無次元数はσ/p_0となるように，速度の特性値として，$\dot{u}_0=\sqrt{E_0/\rho_0}$を用いるべきで，$u^*=(E_0/p_0)(u/l_0)$を得る。$E_0$はヤング率の特性値である。骨組構造においては、上記無次元数を成分とする変位，応力の無次元ベクトルd^*,σ^*，集中外力Pの特性値P_0に対する比P/P_0を要素とする外力の無次元ベクトルをP^*とするとき，無次元平衡方程式が$P^*=K^*\cdot d^*$であるような、無次元剛性マトリックスK^*は，長さ比$k_l=l/l_0$，断面積比$k_A=A/A_0$，ヤング率比$k_E=E/E_0$，ポアソン比ν，変換マトリックスT及び細長比$\lambda^2=Al^2/I$で構成されることになる。Iは断面二次モーメントである。また，部材の曲げモーメントによる縁応力σ_mの無次元数σ_m^*はP_0として部材の重量$w_0A_0l_0$（w_0は部材単位重量）をとれば，$\sigma_m^*=\sigma_m/w_0 \cdot l_0$より

$$\sigma_m^*=\frac{1}{k_A}\frac{1}{k_l}\lambda\cdot C_F\cdot M^* \tag{1}$$

となる。骨組がトラス構造の場合は，σ_mは曲げモーメントによる二次応力で，C_Fは部材断面の中立軸よりの縁距離$h/2$と回転半径rの比で，$C_F=h/2r$，$r=\sqrt{I/A}$である。このC_Fは断面特有の値であってく形断面の場合$C_F=1.73$で，箱形やI形断面では，この値は1.73より小さい値をとる。

ところで，骨組部材の許容圧縮応力は，骨組部材では座屈条件に支配され、厳密には曲げと軸力が同時に作用する場合の座屈条件式を用いるべきであるが，示方書では，曲げによる二次応力が小さいとして，単純に軸力が作用する場合の式を用いる。従って，この式を制約条件に用いる場合には，曲げモーメントによる二次応力が小さいという条件の設定が必要で，トラスの二次応力に対する制限$h/l\leq 1/10$，したがって，細長比λの下限$20C_F\leq\lambda$が設定されることになる。C_Fの値を与えて，A，λが最適設計の解として得られた後，たとえば箱形断面では，幅bを選定して，板厚t_1，t_2を定めることになる。

3、剛結トラスの最適設計　目的関数Zは最小重量設計に従うものとすると

$$Z=w_0\cdot A_0\cdot l_0\left\{1+\sum_{ij}k_{wij}\cdot k_{Aij}\cdot k_{lij}\right\} \tag{2}$$

で与えられ，制約条件は

$$\sigma_{ca}\leq w_0(l_0/L)L\cdot\sigma_{ij}^*\leq\sigma_{ta} \tag{3}$$

$$20\cdot C_F\leq\lambda_{ij}\leq 120 \tag{4}$$

$$20\cdot C_F\leq\lambda_{ij}\leq 200 \tag{5}$$

で与えられ，式(4)は圧縮部材，式(5)は引張部材に関する制約である。ところで目的関数，制約条件式はともに非線形であるのでA_0，k_{Aij}，λ_{ij}を構造変数として，反復線形計画法(SLP)によって解析を行なう。ここで添字ijは(i,j)部材を表わす。式(2)～式(5)までを線形化すると。

圧縮部材については

$$\frac{\sigma_{ca}^{(i)}}{w_0 l_0}-\sigma_{ij}^{*(i)} \leqq \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{*(i)}}{\partial X_i}\right)\Delta X_i^{(i)}-\left(\frac{\partial \sigma_{ca}^{(i)}}{\partial X_i}\right)\Delta X_i^{(i)}/w_0 l_0 \tag{6}$$

$$20C_F-\lambda_{ij}^{(i)} \leqq \left(\frac{\partial \lambda_{ij}^{(i)}}{\partial X_i}\right)\Delta X_i^{(i)} \leqq 120-\lambda_{ij}^{(i)} \tag{7}$$

引張部材については,

$$\frac{\sigma_{ta}^{(i)}}{w_0 l_0}-\sigma_{ij}^{*(i)} \geqq \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{*(i)}}{\partial X_i}\right)\Delta X_i^{(i)} \tag{8}$$

$$20C_F-\lambda_{ij}^{(i)} \leqq \left(\frac{\partial \lambda_{ij}^{(i)}}{\partial X_i}\right)\Delta X_i^{(i)} \leqq 200-\lambda_{ij}^{(i)} \tag{9}$$

となり、目的関数としては

$$\Delta Z=\left(\frac{\partial Z^{(i)}}{\partial A_0}\right)\Delta A_0^{(i)}+\sum_{ij}\left(\frac{\partial Z^{(i)}}{\partial k_{Aij}}\right)\Delta k_{Aij}^{(i)} \tag{10}$$

のようになる。全重量Zの変化量ΔZが 0で近似できるようになるまで、構造変数$\Delta A_0^{(i)}$, Δk_{Aij}, $\Delta\lambda_{ij}$を修正して行き、最適な構造変数の組(A_0, k_{Aij}, λ_{ij})を求めることによってZを求める。

以下に状態変数及び目的関数の感度係数を示す。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial X_i}=\frac{\partial \sigma_{Nij}^*}{\partial X_i}+\frac{\partial \sigma_{mij}^*}{\partial X_i}=\mathbb{B}_N \mathbb{T}_{ij}\left\{\frac{\mathbb{d}_{ij}^*}{k_{Aij}}\left(\frac{\partial \mathbb{K}_{ij}^*}{\partial X_i}\right)+\frac{\mathbb{K}_{ij}^*}{k_{Aij}}\left(\frac{\partial \mathbb{d}_{ij}^*}{\partial X_i}\right)-\frac{\mathbb{K}_{ij}^*\cdot \mathbb{d}_{ij}^*}{k_{Aij}^2}\left(\frac{\partial k_{Aij}}{\partial X_i}\right)\right\}$$

$$+\frac{C_F}{k_{lij}}\cdot\mathbb{B}_M \mathbb{T}_{ij}\left\{\frac{\mathbb{K}_{ij}^*\mathbb{d}_{ij}^*}{k_{Aij}}\left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial X_i}\right)-\frac{\lambda_{ij}\mathbb{K}_{ij}^*\mathbb{d}_{ij}^*}{k_{Aij}^2}\left(\frac{\partial k_{Aij}}{\partial X_i}\right)+\frac{\lambda_{ij}\mathbb{d}_{ij}^*}{k_{Aij}}\left(\frac{\partial \mathbb{K}_{ij}^*}{\partial X_i}\right)+\frac{\lambda_{ij}\mathbb{K}_{ij}^*}{k_{Aij}}\left(\frac{\partial \mathbb{d}_{ij}^*}{\partial X_i}\right)\right\} \tag{11}$$

$$\because\ \mathbb{B}_N=[000100] \qquad \mathbb{B}_M=[001000]\ \text{or}\ [000001]$$

ここで $\mathbb{P}^*=(\mathbb{P}_D+\mathbb{P}_L)/P_0=\mathbb{P}_D^*+\mathbb{P}_L/w_0 A_0 l_0=\mathbb{P}_D^*+\mathbb{P}_L^*$ とおくと、

$$\frac{\partial \mathbb{d}_{ij}^*}{\partial X_i}=\left\{\left(\frac{\partial \mathbb{K}^{*-1}}{\partial X_i}\right)\mathbb{P}^*+\mathbb{K}^{*-1}\left(\frac{\partial \mathbb{P}^*}{\partial X_i}\right)\right\}_{ij}=\left\{-\mathbb{K}^{*-1}\frac{\partial \mathbb{K}^*}{\partial X_i}\mathbb{K}^{*-1}(\mathbb{P}_D^*+\mathbb{P}_L^*)+\mathbb{K}^{*-1}\left(\frac{\partial \mathbb{P}_D^*}{\partial X_i}+\frac{\partial \mathbb{P}_L^*}{\partial X_i}\right)\right\} \tag{12}$$

式(10)から式(12)までの感度係数を表−1に示す。

表−1：感度係数

変数	A_0	k_{Aij}	λ_{ij}
$\frac{\partial Z}{\partial X_i}$	$w_0 l_0\{1+\sum_{ij} k_{wij}\cdot k_{Aij}\, k_{lij}\}$	$w_0 A_0 l_0\{k_{wij}\cdot k_{lij}\}$	0
$\frac{\partial \mathbb{P}_D^*}{\partial X_i}$	0	$k_{wij}\cdot k_{lij}$	0
$\frac{\partial \mathbb{P}_L^*}{\partial X_i}$	$-\frac{\mathbb{P}_L}{w_0\cdot A_0^2\cdot l_0}$	0	0
$\frac{\partial \mathbb{K}^*}{\partial X_i}$	0	$\left(\frac{\partial \mathbb{K}_{ij}^*}{\partial k_{Aij}}\right)'$	$\left(\frac{\partial \mathbb{K}_{ij}^*}{\partial \lambda_{ij}}\right)'$
$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial X_i}$	0	0	1 ⋮ 0
$\frac{\partial k_{Aij}}{\partial X_i}$	0	1 ⋮ 0	0

※ダッシュ記号はマトリックスを構造全体の大きさに拡大することを意味する。

参考文献：三池、丸内、小林 "最適無次元構造解析について(第2報)" 才31回年講概要集(I)