

九州大学 正員 太田俊昭

" 学生員 藤崎和久

" 学生員 前田良夫

1. まえがき

曲げモーメントと軸力を受けるはりの非線形挙動を厳密に追跡するには、幾何学的非線形性ならびに材料力学的非線形性を同時に考慮した解析が行われなければならない。この分野に関しては、応力ひずみの非線形性と適合条件の幾何学的非線形性を考慮して一貫した有限要素法に依って数値解析を行った、藤田、崎本らの研究がある。これに対して本法は、本質的には有限要素法であるが、部材要素に対して周知の座屈たわみ角式をそのまま活用することにより、計算容量を減じうるように試みたものである。その際、簡便のため、部材要素において塑性曲率の直線変化を仮定した。以下に解法の骨子を説明する。

2. 理論式

(i). 座屈たわみ角式

図-1のように、軸方向片端力 N と片端モーメント M_A, M_B が作用するはりにおいて、部材軸方向力が一様で N に等しいとし、任意点の曲率を塑性曲率 ϕ^P を用いて、 $\phi = M/EI + \phi^P$ と表わせば、分割部材 AB において次式が得られる。

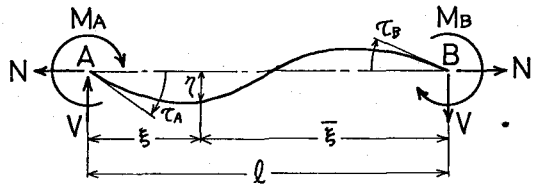


図-1

$$\begin{aligned} M_A &= \left(4 \frac{EI}{l} + 4 \frac{Nl}{30}\right) \cdot \tau_A + \left(2 \frac{EI}{l} - \frac{Nl}{30}\right) \cdot \tau_B + M_A^P & \begin{cases} M_A^P = -EI \phi_A^P \\ M_B^P = -EI \phi_B^P \\ N^P = -\frac{EA}{2} (\epsilon_{CA}^P + \epsilon_{CB}^P) \end{cases} \\ M_B &= \left(2 \frac{EI}{l} - \frac{Nl}{30}\right) \cdot \tau_A + \left(4 \frac{EI}{l} + 4 \frac{Nl}{30}\right) \cdot \tau_B + M_B^P \\ N &= EA \frac{l - l_0}{l} + \frac{EA}{30} \cdot (2 \cdot \tau_A^2 - \tau_A \cdot \tau_B + 2 \cdot \tau_B^2) + N^P \end{aligned}$$

(ii). 荷重増分に関する接線部材剛性方程式

荷重増分に対して、材端力増分と部材変形増分を求めれば、上式より、高次の微小項を無視した次の接線部材剛性方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \Delta M_A \\ \Delta M_B \\ \Delta N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + \frac{EA}{900} \cdot \tau_{AB}^* \cdot \widetilde{\tau}_{AB} & \beta' + \frac{EA}{900} \cdot \tau_{AB}^* \cdot \widetilde{\tau}_{BA} & \frac{EA}{30} \cdot \tau_{AB}^* \\ \beta' + \frac{EA}{900} \cdot \tau_{BA}^* \cdot \widetilde{\tau}_{AB} & \alpha' + \frac{EA}{900} \cdot \tau_{BA}^* \cdot \widetilde{\tau}_{BA} & \frac{EA}{30} \cdot \tau_{BA}^* \\ \frac{EA}{30} \cdot \widetilde{\tau}_{AB} & \frac{EA}{30} \cdot \widetilde{\tau}_{BA} & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \tau_A \\ \Delta \tau_B \\ \Delta l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta M_A^P \\ \Delta M_B^P \\ \Delta N^P \end{pmatrix}$$

ただし $\alpha' = 4 \frac{EI}{l} + 4 \frac{Nl}{30}$, $\tau^* = \tau' + \Delta \tau$, $\tau_{AB}^* = 4 \tau_A^* - \tau_B^*$, $\tau_{BA}^* = 4 \tau_B^* - \tau_A^*$

$\beta' = 2 \frac{EI}{l} - \frac{Nl}{30}$, $\widetilde{\tau} = \tau' + \frac{\Delta \tau}{2}$, $\widetilde{\tau}_{AB} = 4 \tau_A' - \tau_B'$, $\widetilde{\tau}_{BA} = 4 \tau_B' - \tau_A'$

なお先行状態の諸量にダッシュ、その増分に Δ を付して表わしている。

上式をマトリックス表示して

$$\Delta \mathbf{F}^P = \mathbf{k} \cdot \Delta \boldsymbol{\tau} + \Delta \mathbf{F}^P \quad \text{-----} \quad (1)$$

(iii). 変形の適合条件式

図-2を参照して変形の適合条件を求めれば以下のとおりである。まず、先行状態に対して、

$$l' \cdot \cos R' = x'_B - x'_A, \quad \tau'_A = \theta'_A - R'$$

$$l' \cdot \sin R' = y'_B - y'_A, \quad \tau'_B = \theta'_B - R'$$

よって、荷重増分に対して次式が求められる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta T_A \\ \Delta T_B \\ \Delta l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & -\psi/l' \cdot \sin R^* & \psi/l' \cdot \cos R^* \\ 0 & -\psi/l' \cdot \sin R^* & \psi/l' \cdot \cos R^* \\ 0 & -(\cos R^* + \frac{\Delta R \cdot \psi}{2} \sin R^*) & -(\sin R^* - \frac{\Delta R \cdot \psi}{2} \cos R^*) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_A \\ \Delta \theta_B \\ \Delta R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & \psi/l' \cdot \sin R^* & -\psi/l' \cdot \cos R^* \\ 1 & \psi/l' \cdot \sin R^* & -\psi/l' \cdot \cos R^* \\ 0 & \cos R^* + \frac{\Delta R \cdot \psi}{2} \sin R^* & \sin R^* - \frac{\Delta R \cdot \psi}{2} \cos R^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_B \\ \Delta \theta_A \\ \Delta R \end{Bmatrix}$$

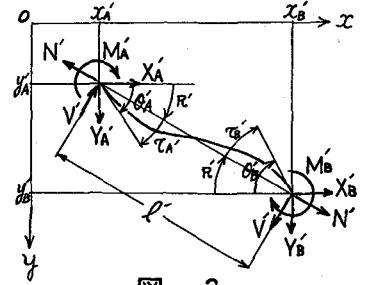


図-2

上式をマトリックス表示して

$$\Delta T = \alpha_A \cdot \Delta U_A + \alpha_B \cdot \Delta U_B \quad \text{----- (2)}$$

(iv). A点およびB点の力の座標変換 (図-2参照)

A点およびB点における、材端力増分の座標変換式は、x, y 固定座標系に関して次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_A \\ \Delta X_A \\ \Delta Y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin R^*}{l'} & -\frac{\sin R^*}{l'} & -\cos R^* \\ \frac{\cos R^*}{l'} & \frac{\cos R^*}{l'} & -\sin R^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_B \\ \Delta M_A \\ \Delta N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ N' \cdot \sin R^* + V' \cdot \cos R^* & -V' \cdot \frac{\sin R^*}{l'} \\ -N' \cdot \cos R^* + V' \cdot \sin R^* & \frac{V' \cdot \cos R^*}{l'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta R \\ \Delta l \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_B \\ \Delta X_B \\ \Delta Y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin R^*}{l'} & \frac{\sin R^*}{l'} & \cos R^* \\ -\frac{\cos R^*}{l'} & -\frac{\cos R^*}{l'} & \sin R^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_B \\ \Delta M_A \\ \Delta N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -N' \cdot \sin R^* + V' \cdot \cos R^* & -\frac{V' \cdot \sin R^*}{l'} \\ N' \cdot \cos R^* + V' \cdot \sin R^* & \frac{V' \cdot \cos R^*}{l'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta R \\ \Delta l \end{Bmatrix}$$

これをマトリックス表示して

$$\Delta P_A = A_A \cdot \Delta F + b \cdot \begin{Bmatrix} \Delta R \\ \Delta l \end{Bmatrix}, \quad \Delta P_B = A_B \cdot \Delta F - b \cdot \begin{Bmatrix} \Delta R \\ \Delta l \end{Bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

ここに

$$\begin{Bmatrix} \Delta R \\ \Delta l \end{Bmatrix} = C^0 \cdot \Delta U_A - C^0 \cdot \Delta U_B \quad \text{----- (4)}$$

(v). 剛性方程式

式(1), (2), (3), (4)を分割部材に適用すれば、次のような剛性方程式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_A &= k_{AA} \cdot \Delta U_A + k_{AB} \cdot \Delta U_B + A_A \cdot \Delta F^P \\ \Delta P_B &= k_{BA} \cdot \Delta U_A + k_{BB} \cdot \Delta U_B + A_B \cdot \Delta F^P \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{ただし } k_{AA} = A_A \cdot k \cdot A_A + b \cdot C, \quad k_{AB} = A_A \cdot k \cdot A_B - b \cdot C$$

$$k_{BA} = A_B \cdot k \cdot A_A - b \cdot C, \quad k_{BB} = A_B \cdot k \cdot A_B + b \cdot C$$

(vi). 全体系に対する剛性マトリクス

各分割部材の節点における、力のつり合いおよび変形の適合を考慮すれば、i 節点において

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_i &= \Delta U_{B \cdot i-1} = \Delta U_{A \cdot i} \\ \Delta W_i &= \Delta P_{B \cdot i-1} + \Delta P_{A \cdot i} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (6)}$$

が成立するので、全体系の荷重増分 ΔW と節点変位増分 ΔU との関係を与える剛性マトリクスが、次のように得られる。

$$\Delta W = K \cdot \Delta U + A \cdot \Delta F^P \quad \text{----- (7)}$$

3. 解析例および結果

解析例および結果は、講演当日発表する予定である。

<参考文献>

1. T. Ohta & T. Yamazaki: "Elasto-Plastic Analysis of Steel Structure Considering the Effects.....", Proc. of JSCE, No. 144, Oct. 1971
2. 藤田 護 他: 平面骨組構造物の最高荷重 (弾塑性有限変形解析) 財団法人建設者協会第5回大会で121構造解析法研究発表論文集 p. 46. 6
3. S. Komatsu & T. Sakimoto: "Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members....." Proc. of JSCE, No. 252, Aug. 1976