

熊本大学工学部 正員 秋吉 卓
熊本大学工学部 学生員 〇竹年礼 講一

1. まえがき 地盤を離散化して考えれば複雑な地盤をうまく表現できるが、構造物との相互作用で重視される運動減衰の効果を離散系に持込むのは容易ではない。したがって地盤の広がりも考えるとき、人為的に設けたその領域の境界に特別の工夫が必要であり、定常正弦振動の場合について Lyomer⁹ が成功していることは周知の通りである。その後多くの試みが行なわれたが、^{23,27} ほとんどの場合正弦定常振動について解析を行っており、連続体の解とも比較してみるとおおむね一致は良好であった。しかしながら上記の手法も不規則な振動にまで拡張するのは容易ではないので、著者は過渡振動解を伝達関数を用いる手法で求めて連続解と比較してみたが、彼の立ち上りの部分で両者の差は大きく、彼の進行方向である地盤の水平方向の分割を細かくするほど良好な結果が得られる等の成果があった。^{49,57} 今回は地表面に加振振がある場合の同数値法について計算しているが、解析解の内容に時間的な重積分を含んだりして、手回すものには比べて計算がやや複雑になる。

2. 解析手順 図-1のような2次元半無限領域の弾性地盤を考える。紙面に直角な方向(y軸方向)のせん断振動を対象にするので、x軸上で発生する波動はその左右方向に対称に伝播することより、右半分の領域のみを取扱う。各質点は質量mで、それらは互に水平 k_1 、鉛直 k_2 の剛性を持つばねで支持されているものとする。このとき、 (k, j) 点における水平変位 $\psi_{k,j}$ に関する運動方程式は次式のように書かれる。

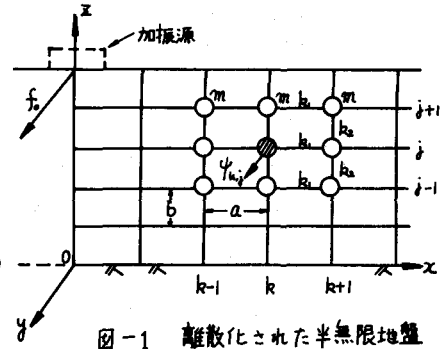


図-1 離散化された半無限地盤

$$m \ddot{\psi}_{k,j} + k_1 (2\psi_{k,j} - \psi_{k-1,j} - \psi_{k+1,j}) + k_2 (2\psi_{k,j} - \psi_{k,j-1} - \psi_{k,j+1}) = 0 \quad \dots\dots(1)$$

ここで Laplace 変換を $L[\psi_{k,j}(t)] = \bar{\psi}_{k,j}(s)$ とし、これを

$$\bar{\psi}_{k,j}(s) = \bar{\psi}_k(s) \phi_j \quad (k=0,1,2,\dots; j=1,2,\dots,m) \quad \dots\dots(2)$$

の形の変数分離形に書き表わすと、式(1)は次の水平方向 $\bar{\psi}_k(s)$ 、鉛直方向 ϕ_j に関する2式に分離される。

$$(s^2 + 2\omega_1^2 + \lambda^2) \bar{\psi}_k - \omega_1^2 (\bar{\psi}_{k-1} + \bar{\psi}_{k+1}) = 0 \quad (\omega_1^2 = k_1/m, \lambda: \text{分離定数}) \quad \dots\dots(3)$$

$$(2\omega_2^2 - \lambda^2) \phi_j - \omega_2^2 (\phi_{j-1} + \phi_{j+1}) = 0 \quad (\omega_2^2 = k_2/m) \quad \dots\dots(4)$$

式(4)をマトリックス形式に書き直すと

$$([A] - \lambda^2 [I]) \{\phi\} = 0 \quad \text{あるいは} \quad [\theta]^T [A] [\theta] = [\lambda^2] [\theta]^T [\theta] \quad \dots\dots(5)$$

こゝに、 $[\theta]$: modal matrix, $[\lambda^2]$: 対角固有値行列, $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$

しかるに、 $[\theta]^T [\theta] = [I]$ と正規化するので、式(5)は $[\theta]^T [A] [\theta] = [\lambda^2]$ -----(6)

一方、 l 次モード $\{\phi_l\}$ の振幅を $\bar{\psi}_l^0(s)$ およびその伝達関数を $G_l^0(s)$ とすると、式(3)は次式となる。

$$\bar{\psi}_k^0(s) = \{G_l^0(s)\}^k \bar{\psi}_0^0(s) = G_k^0(s) \bar{\psi}_0^0(s)$$

と書き表わされるので、 l 次モードの重みを A_k とすると k 列目の変位ベクトル $\{\bar{\psi}(s)\}_k$ は次式となる。

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = \sum_{l=1}^m A_l \bar{\psi}_l^0(s) \{\phi_l\} = [\theta] \begin{bmatrix} \{G^0(s)\}^k \\ \vdots \\ \{G^0(s)\}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \bar{\psi}_0^0(s) \\ \vdots \\ A_m \bar{\psi}_0^0(s) \end{Bmatrix} = [\theta] [G(s)]_k \{A'(s)\} \quad \dots\dots(7)$$

地表面 ($x=0, z=H$) の裏に作用するせん断力 τ_{xy} を $f_0(t)$ とする

$$k_1(\{\psi\}_0 - \{\psi\}_1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_0/b_1 \end{Bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \{\bar{\psi}\}_0 - \{\bar{\psi}\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_0/b_1 \end{Bmatrix} \quad \text{----- (8)}$$

一方、 $\{\bar{\psi}(s)\}_1 = [\Theta][G(s)]_1\{A(s)\}$ および $\{\bar{\psi}(s)\}_0 = [\Theta]\{A(s)\}$ の関係があるので、式 (8) は

$$[\Theta]([I] - [G]_1)\{A(s)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_0/b_1 \end{Bmatrix}$$

したがって

$$\{A(s)\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-G_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-G_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{n1} \\ \vdots \\ \theta_{nn} \end{Bmatrix} f_0/b_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\theta_{n1}}{1-G_1} \\ \vdots \\ \frac{\theta_{nn}}{1-G_n} \end{Bmatrix} f_0/b_1, \quad ([\Theta]^T[\Theta]=[I] \text{ 使用}) \quad \text{----- (9)}$$

この $\{A(s)\}$ を式 (7) に代入して逆変換すると以下になる。

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = [\Theta][G(s)]_k \begin{Bmatrix} \frac{\theta_{n1}}{1-G_1} \\ \vdots \\ \frac{\theta_{nn}}{1-G_n} \end{Bmatrix} \frac{f_0}{k_1} = [\Theta] \begin{Bmatrix} \theta_{n1} \frac{G_1^k}{1-G_1} \\ \vdots \\ \theta_{nn} \frac{G_n^k}{1-G_n} \end{Bmatrix} \frac{f_0}{k_1} \xrightarrow{\text{逆変換}} \{\psi(t)\}_k = \frac{1}{k_1} [\Theta] \begin{Bmatrix} \theta_{n1} \int_0^t F_{1k}(\tau) f_0(t-\tau) d\tau \\ \vdots \\ \theta_{nn} \int_0^t F_{nk}(\tau) f_0(t-\tau) d\tau \end{Bmatrix} \quad \text{----- (10)}$$

ただし

$$F_k^k(t) = \int_0^t (2k-1) \omega_1 J_{2k-1}(2\omega_1 \tau) \frac{d\tau}{\tau} - \lambda_k \int_0^t \int_0^u (2k-1) \omega_1 J_{2k-1}(2\omega_1 \tau) \frac{d\tau}{\tau} J(\lambda_k \sqrt{t^2-u^2}) \frac{u du}{\sqrt{t^2-u^2}} \quad \text{----- (11)}$$

一方、連続体として解析したときの解は次式で表わされる。

$$\psi(x, z, t) = -\frac{2C}{GH} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k_z(H-z) \int_0^t f_0(t-\tau) J_0(k_z \sqrt{t^2-x^2/c^2}) d\tau \quad \text{----- (12)}$$

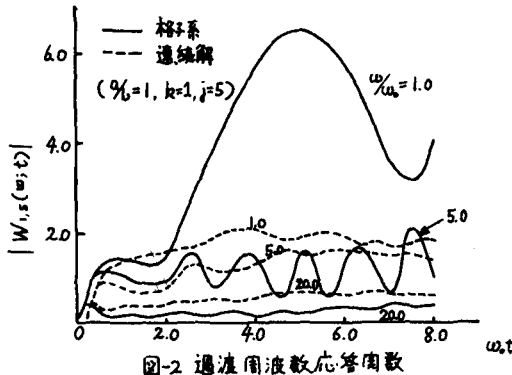


図-2 過渡周波数応答関数

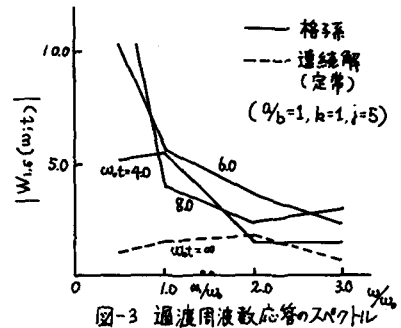


図-3 過渡周波数応答のスペクトル

強制外力 f_0 が正弦振動 $f_0 \exp(i\omega t)$ を行う場合について、その結果の一部を図-2、図-3に掲げている。 $|W_{1,5}(w;t)|$ は加振点直下の地表面質点の応答変位の絶対値であるが、図-2は振動数をパラメータとして、その過渡状態を示している。運動開始後1サイクル程度では加振振動数によらず格子系と連続体との似た変動を行うが、2サイクル後では振動数ほど格子系の変動が激しく、過渡状態が長引く。このため図-3に示した同じ量の周波数応答関数は、格子系の1次固有振動数 ω_1 ($\omega/\omega_0 = 1.4$) より小さい振動数範囲での、両解析結果のくい違いが大きく、定常まで相当の時間を要するようである。これ以後の時刻での応答結果については、その他の資料とともに講演時に発表する予定である。

- 参考文献 1) J. Lysmer & G. Whitt ; EML, ASCE, Vol. 98, Feb. 1972, 2) 秋吉・徳川・吉川 ; 土木学会第28回年次学術講演会講演概要集 I-250, 3) 田波見宏・下村孝男 ; 建築学会論文報告集 第243号, 1976年5月, 4) 秋吉・吉川 ; 土木学会第29回年次学術講演会講演概要集 I-200, 5) 秋吉 ; 第14回地震工学研究発表会講演概要, 1976年7月