

長崎大学工学部 正員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員・角田和哉

1. 緒言 吊橋の固有振動性状の解析にあたっては鉛直変位, ねじれ, 水平変位の各固有振動が別個に取り扱われてきたが, 風のように鉛直, ねじれおよび水平の各成分を有する外力が作用する場合や吊橋造の力学的特性から各成分の連成振動が現れ, 理想的な微小振動においても, 分離できないものと考えられる。また, 振動の振幅が増大すれば連成の大きさも異なってくるのが予想される。著者らは先に吊橋の動的な諸問題を解析するための連成を考慮した撓度理論と同程度の精度をもつ運動方程式を提案のうえ, 非連成法との関係を考察したが¹⁾, ひきつづき, 本論文は従来の解析では死荷重水平張力に比較して無視されている活荷重水平張力の影響および吊橋のキャンパーおよび活荷重水平張力によって生ずる連成振動を非線形振動の問題として解析したものである。

2. 運動方程式 キャンパーによる初期曲率を有する吊橋の連成運動方程式は次のように与えられる。

$$(1) \text{ 補剛桁鉛直: } E I_u u'' + E A u' u - (2H_0 + H_p + H_{p2}) u'' + (H_p - H_{p2}) \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} (\omega_k + \omega_c) \ddot{u} = P_0(t) - (H_p + H_{p2}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u}'' \quad (1)$$

$$\text{ねじれ: } E I_\varphi \varphi'' - (GJ - 2k E I_{p0}) \varphi'' - (2H_0 + H_p + H_{p2}) \frac{1}{2} \varphi^2 + E I_k k^2 \varphi + (H_p - H_{p2}) \frac{1}{2} u'' - E (I_{p0} - k I_{p0}) u'' + k (E I_{p0} k - E I_k - GJ) u'' + \frac{1}{2} a \{ P_0 - \omega_k (1 - \frac{\varphi}{2}) \} (\theta + \theta_2) + \frac{1}{2} (\omega_k \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u}) \ddot{\varphi} = m_k - (H_{p2} - H_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u}'' \quad (2)$$

$$\text{水平: } E (I_k - 2I_{p0} k + I_k k^2) u'' - GJ k^2 u'' - E (I_{p0} - I_k k) \varphi'' - k (E I_k - E I_{p0} k + GJ) \varphi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ddot{u} + \frac{1}{2} P_0(t) - \omega_k (1 - \frac{\varphi}{2}) (\theta + \theta_2) = P_0(t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u}'' \quad (3)$$

$$\text{のケーブル水平: } (H_0 + H_{p1}) \ddot{u}'' + \frac{1}{2} \{ P_0(t) + \omega_k (1 - \frac{\varphi}{2}) \} \theta_2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ddot{u} = -\frac{1}{2} P_0(t) \quad (4)$$

$$(H_0 + H_{p2}) \ddot{u}'' + \frac{1}{2} \{ P_0(t) + \omega_k (1 - \frac{\varphi}{2}) \} \theta_2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ddot{u} = -\frac{1}{2} P_0(t) \quad (5)$$

$$\text{適合条件式: } H_0 = u - \ddot{u} + a \varphi \quad (6)$$

ここに, $H_0 = \frac{(\omega_k + \omega_c) \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u}{16 f}$, u : 鉛直変位, φ : ねじれ角, v : 水平変位, $\ddot{u}$: ケーブルの水平変位

運動方程式に含まれるケーブルの活荷重水平張力は次式によって求められる。

$$H_k = - \frac{E A_c}{L_c} \left[\int_0^L \ddot{u} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u} - \frac{1}{2} \int_0^L \ddot{u}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u} - \omega_k t L \right] \quad (7) \quad \text{ここに, } \ddot{u} = u f \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \text{ ケーブルの鉛直変位}$$

3. 鉛直振動 鉛直振動については, ねじれおよび水平振動と分離することができる。回転慣性を無視し, かつ初期曲率がないものとするれば, 通常の吊橋の撓度理論の運動方程式が次のようにえられる。

$$L(u) = E I_u u'' - 2(H_0 + H_p) u'' + \frac{1}{2} (\omega_k + \omega_c) \ddot{u} - P_0(t) - \frac{16 H_p f}{\partial^2} = 0 \quad (8) \quad \text{ここに, } H_p = - \frac{E A_c}{L_c} \int_0^L u \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u}$$

3スパン単純の吊橋の主径間のみを対象として, 補剛桁およびケーブルを1自由度系と仮定すれば, 式(8)の変位を次のように仮定することができる。 $u = T(t) \sin \frac{\pi x}{2l}$ (9) ここに, $T(t)$: 未知の時間係数

式(9)を式(8)に代入して, ガラーキン法を適用すれば, $\int_0^L u \sin \frac{\pi x}{2l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_u \ddot{u} = 0$ から次の時間に関する常微分方程式をうる。

$$\ddot{T} + \alpha T + \beta T^2 = \gamma P(t) \quad (10)$$

$$\text{ここに, } \alpha = \left[E I_u \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 + \frac{\pi^2 (\omega_k + \omega_c)}{4 f} + \frac{16 H_p f}{L_c} \right] \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 / \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2, \beta = 32 \pi \frac{E A_c}{L_c} \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2}, \gamma = \frac{1}{2} / \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2$$

上式の α , β において, 吊橋の鉛直振動を支配するパラメーターはサゲ比 f/l である。 f/l が小さくなれば死荷重水平張力 H_0 が増大し, 逆に活荷重水平張力 H_p は減少する。また f/l が大きくなれば H_0 が減少し, H_p が増大することになる。したがって, f/l が大きいほど非線形性が大きくなる。いままでの長支間吊橋の実績はほとんど $f/l \sim 1/2$ に入っており, 非線形性はあまり強くないことがわかる。なお, 式(10)は2次の非線形項を含む微分方程式で, 非対称なバネ特性をもつ1自由度系の運動方程式に帰着する。図-1に補剛桁とケーブルの重量の10%のステップ外力が突然作用したときの動的応答をRunge-Kutta-Gill法によりシミュレーションした結果を示す。図において点線は線形応答を示し, 肉太の実線は外力が鉛直下方に作用した場合の非線形応答を, また肉細の実線は外力が上方に作用した場合の非線形応答を示す。復元力特性が引張に対して硬化バネ, 圧縮に対して軟化バネの両特性をもつために外力が下向きに作用するときは線形の場合よりも構造約に剛になり, 応答振幅は減少し, 周波数

が増大するが、逆に外力が上向きに作用する場合は構造的に柔になり、応答振幅は増大し、周波数が減少することがわかる。これは吊橋の構造特性から、下向きの変位に対してはケーブルに張力が生ずるために水平張力 $2(H_0/H_0)$ が増大し、上向きの変位に対しては逆に減少することによるものである。

次に $P(t)=0$ の非線形自由振動の性質を検討するために、式(10)の解を次のように仮定する。

$$T = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t \quad (11)$$

ここに、 ω ：非線形円振動数

上式を式(10)に代入して調和バランス法を適用すれば次式をうる。

$$\alpha a_0 + \beta(a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}a_3^2) = 0, (\alpha - \omega^2)a_1 + \beta(2a_0a_1 + a_2a_3) = 0$$

$$(\alpha - 4\omega^2)a_2 + \beta(\frac{1}{2}a_1^2 + 2a_0a_2) = 0 \quad (12)$$

上式を任意の振動数に対してNewton-Raphson法を適用して、ゼロ以外の解を求めれば、振動の各調波成分を求めることができる。

関門橋の主径間について、円振動数 ω と無次元振幅 A =(最大振幅/桁高)との関係を求めれば表-1に示すとおりである。表において第2列目 a_0 は振幅の直流成分、第3列目は基本波の振幅、第4列目は非線形に伴う2倍の高調波成分をそれぞれ示すものである。振幅の増大に伴って振動数は減少し、全体として軟化バネの特性を示す。振幅が桁高程度となっても円振動数は1%程度変化するのみで引張・圧縮の両領域の存在する自由振動特性におよぼす非線形項の影響は小さい。また、振動の直流成分 a_0 は振幅の増加とともに増大するが、この項は振動の中立点の移動を示すもので、引張・圧縮の両みずみエネルギーが等しい位置すなわち振動の中心が吊橋の静的平衡位置から上方へ動くことを意味するものである。

4. 水平およびねじれ振動 通常水平振動と

ねじれ振動は独立に生ずるものとして取り扱われているが、実際には吊橋の純粋な水平たわみ振動が発生した例はほとんど報告されていない。この原因はハンガーが補剛桁の重心に取り付けられていないこと、キャンバーの

存在により水平振動とねじれ振動が連成することおよびケーブルの活荷重水平張力を介してねじれおよび水平振動によって鉛直振動が誘起されるなどにより振幅が増大すれば水平振動がねじれ振動もしくは鉛直振動に移行するものと考えられている。水平およびねじれの連成振動を検討するために、先ず線形の範囲で2軸対称断面を対象とすれば次の運動方程式がえられる。

$$\begin{aligned} E I_u \varphi^{(4)} - (G J + \frac{1}{2} H_0) \varphi'' + E I_u k^2 \varphi + E I_u K U'' - K(E I_u + G J) U' + \frac{1}{2}(\omega_c h_1^2 + \frac{1}{4} \omega_c) \varphi + a \omega_c \theta &= 0 \\ E I_u (k^2 + K) U^{(4)} - G J K U'' + E I_u K \varphi'' - K(E I_u + G J) \varphi + \frac{1}{2} \omega_c \dot{U} + \omega_c \theta &= 0 \\ 2 H_0 \ddot{U} - \frac{a}{2} \ddot{\varphi} + \omega_c \theta &= 0 \end{aligned} \quad \text{ここに、} h_1 \theta = U - \bar{U} + a \varphi \quad (13)$$

関門橋の主径間を対象に連成振動の固有円振動数および振動形を求めれば表-2(ω欄)に示すとおりである。従来の非連成法による水平振動およびねじれ振動の解を求めれば、表-2(b), (c)欄に併記する結果をうる。表より振動数については連成法と非連成法との差はほとんど認められないが、振動形については水平とねじれに連成があることがわかる。その他の結果については講演時に発表する。

参考文献 1) 高橋, 堂井, 田代: 連成を考慮した吊橋の基礎方程式(第2報 振動問題), 土木学会西部支部研究発表会講演集, 昭和51年2月, PP. 5-6

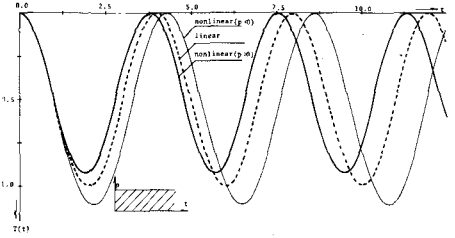


図-1 ステップ荷重による応答

表-1 振動数と振幅の関係

ω	a_0	a_1	a_2	A
1.5737	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.5720	0.0091	0.3822	0.0030	0.3852
1.5680	0.0335	0.7317	0.0112	0.7430
1.5640	0.0579	0.9599	0.0194	0.9795
1.5600	0.0822	1.1420	0.0276	1.1701
1.5560	0.1065	1.2976	0.0357	1.3341
1.5520	0.1308	1.4354	0.0440	1.4942

表-2 水平およびねじれ連成振動

		ω	ϕ	v	$\bar{v}$	θ
(a)	$\phi, v, \bar{v}, \theta$	0.5277	-0.0007	1.0	0.8142	0.0137
		2.0405	0.0144	1.0	-4.5615	0.4107
		2.9223	1.0	0.3114	-1.0595	0.2229
(b)	$v, \bar{v}, \theta$	0.5281		1.0	0.8153	0.0137
		2.0442		1.0	-4.5506	0.4117
(c)	ϕ	2.9142	1.0			