

熊本大学 正会員 平井一男
八代高専 正会員 水田洋司

筆者の一人は、一部修正された構造物の固有値、固有モードを修正前の固有値、固有モードを利用して求める方法を提案した⁽¹⁾。その論文では、修正された構造物の振動方程式を作り、解はそのマトリックスの行列式の計算より求める Trial and Error Method が用いられている。本研究は、一部修正に関する静的関係式をもとにして、修正量を外力項に変換し、Power Method を適用して解を求めようとするものである。この方法によれば、行列式の計算をする事なく、部分マトリックスとベクトルの積の繰り返し演算で固有値、固有モードを得ることができる。一部修正には、剛性変化、質量変化が考えられるが、ここでは剛性変化のみとする。

解析法 便宜上、修正前の原構造物を system A、修正後の構造物を system B とする。外力 F が作用するときの system A の静的変形 W_A は、撓性マトリックス f_A を用いて次のように表わせる。

$$W_A = f_A \cdot F = K_A^{-1} \cdot F \quad (1)$$

ここに、 K_A は system A の剛性マトリックス。また、 ΔK だけ修正された system B の変形 W_B は、

$$W_B = f_A \cdot (I + \Delta K \cdot f_A)^{-1} \cdot F \quad (2)$$

と表わせる。これより、system B は system A の静特性を利用して、 F を $(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1}$ 倍あるいは、 f_A を $(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1}$ 倍しても求められることがわかる。ここで、 $(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1}$ について考える。 ΔK 、 f_A を次式

$$\Delta K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \quad f_A = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

のように考えると、

$$(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

と表わせる。ここに、 $b_1 = -(I + \Delta K \cdot f_{22})^{-1} \cdot \Delta K \cdot f_{21}$ (6)

$$b_2 = (I + \Delta K \cdot f_{22})^{-1} - I \quad (7)$$

$$b_3 = -(I + \Delta K \cdot f_{22})^{-1} \cdot \Delta K \cdot f_{23} \quad (8)$$

また、 $b_1 \sim b_3$ を system A の固有モード Φ_n ($n=1, 2, 3, \dots$) を用いて次のように表わす。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sum C_n \Phi_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

この時の C_n は、直交条件を用いて (9) 式で決定できる。式中の M_A は、system A の質量マトリックスである。

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot M_A \cdot \Phi_n = (\sum C_n \Phi_n^T) \cdot M_A \cdot \Phi_n = C_n \quad (10)$$

C_n は ΔK と同じ次数のベクトルである。任意の外力 F が作用した時の system A の静的変形 W_A は、system A の固有値 $\lambda_n (= \omega_n^2)$ 、固有モード Φ_n を用いて次式で表わせる。

$$W_A = \sum (\Phi_n \cdot \Phi_n^T / \lambda_n) \cdot F \quad (11)$$

同式に示すように、system B に対しては、 F を $(I + \Delta K \cdot f_A)^{-1}$ 倍して、 W_B を求めることができる。11は、任意の変形 $W_B (= \sum d_n \Phi_n)$ による慣性力で表わされる F を用いると、system B の変形 W_B は、

$$W_B = \lambda \sum \frac{\Phi_n \cdot \Phi_n^T}{\lambda_n} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sum C_n \Phi_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot M_A \cdot (\sum d_n \Phi_n) \quad (12)$$

と表わせる。ここで、 $\lambda=1$ とし、直交条件を用いて簡単にすると

$$W_{B1} = \sum \frac{d_n}{\lambda_n} \Phi_n + \sum \frac{\Phi_n \Phi_n^T}{\lambda_n} \left(\sum C_n d_n \right) = \sum d_{n1} \Phi_n \quad (43)$$

ここに、

$$d_{n1} = \frac{1}{\lambda_n} \left\{ d_n + \Phi_n^T \left(\sum C_n d_n \right) \right\} \quad (44)$$

必式で表わされる変形による慣性力 $F_1 = -\lambda M_A W_{B1} = -\lambda M_A \sum d_{n1} \Phi_n$ が外力として作用した時には、同様に

$$W_{B2} = \sum \frac{1}{\lambda_n} \left\{ d_{n1} + \Phi_n^T \left(\sum C_n d_{n1} \right) \right\} \Phi_n = \sum d_{n2} \Phi_n \quad (45)$$

以下、同様にして：

$$W_{Bk+1} = \sum \frac{1}{\lambda_n} \left\{ d_{nk} + \Phi_n^T \left(\sum C_n d_{nk} \right) \right\} \Phi_n = \sum d_{n,k+1} \Phi_n \quad (46)$$

$d_{n,k+1}$ が一定の値に収束するまで繰り返し演算を行なう。したがって、46式で求められる W_{Bk+1} が固有モードであり、固有値は Rayleigh の商を利用して簡単に求めることができる。以上は、1番目の固有値、固有モードを求める方法である。2番目の固有モードは、変形 W_{Bk+1} から1番目のモード成分を差し引き、46式を繰り返し計算することにより求めることができる。3番目以降についても同様に行えばよい。

数値計算

図-1 に示すトラス橋を用いて、本法と Jacobi 法の解の比較を行なっている。

system A では各部材の断面積を 30cm^2 とし、4-5 部材のみ断面積を 15cm^2 とした系を system B としている。表-2 に固有値を、表-3 に固有モードを示している。本法による精度は、46式で示される $d_{n,k+1}$ の収束条件により異なるが、表-2、表-3 に示した値は $|d_{n,k+1} - d_{n,k}|/d_{n,k} \leq 10^{-5}$ という収束条件を用いている。なお、計算桁数は16桁である。また表-2、表-3 には、固有値、固有モードの一部しか載せていない。

表-2 固有値 (rad/sec)

	本 法	Jacobi 法		本 法	Jacobi 法
1	25.619	25.618	7	176.708	176.708
2	45.725	45.724	8	195.709	195.709
3	70.528	70.527	9	225.815	225.815
4	104.937	104.937	10	242.563	242.564
5	128.303	128.303	11	255.450	255.450
6	151.526	151.526	12	315.480	315.480

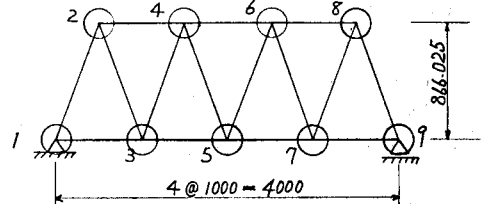


図-1 トラス橋 (単位 cm)

表-1 各節点の重量 (kg)

節点	重量	節点	重量
1	2500	6	2000
2	1000	7	5000
3	5000	8	1000
4	2000	9	2500
5	5000		

表-3 1次固有モード

y_{d2}	0.094752	y_{d3}	0.169351	y_{d4}	0.218264
	0.094752		0.169350		0.218263
y_{d5}	0.240617	y_{d6}	0.218939	y_{d7}	0.166811
	0.240615		0.218937		0.166810
				y_{d8}	0.088755
					0.088756

[注] (1) Hirai, I., Yoshimura, T., and Takamura, K., "Short Communications on a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures," International Journal

for Numerical Method in Engineering, Vol. 6, pp441~442, 1973