

長崎大学工学部 ○正員 岡林隆敏

" 学生員 神原 隆

" 学生員 速木英一郎

1 序論 橋梁の走行荷重による応答解析に関しては、従来多くの研究がなされてきた。最近再び、路面の不規則な凹凸を考慮した応答解析として研究されている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。この解析は、路面の凹凸を実測から求めたパワースペクトラムを有する確率過程と考え、これを外力とする車輛橋梁系を不規則振動論の手法によりなされる。ところが、車輛橋梁系を記述する運動方程式は時変係数の微分方程式で記述されるので、路面の凹凸による応答は非定常過程になる。従来の不規則振動論による手法では、このような時変係数を有する系の解析を行うために、何らかの仮定をしなければならない。本研究では、時間微分を有し、なおかつ実測のパワースペクトラムを有する確率過程を得るために、白色雑音過程を入力とする系を導入することにより、この外力系と車輛橋梁系を一つの系と考え、伊藤形の確率微分方程式で表現する。これより共分散を誘導するための基礎式を誘導した。さらに、初期条件として、路面の凹凸によって車輛の応答が定常になる時の値を用いることにより、これを考慮した解析を行った。さらに、この解析の妥当性を検討するために、定常応答について従来の解析との比較をしたが、その結果両者の一致が確認できた。

2 運動方程式および路面の凹凸 図1に示したような、1自由度系と仮定した走行荷重が橋梁を通過する際の運動方程式について述べる。橋梁の支点の変位を $y(x, t)$ 、車輛の変位を $z(t)$ 、さらに路面の凹凸を $n(t)$ とすると、車輛の運動方程式は次式で得られる。 $W\ddot{z}(t) + C(\dot{z}(t) - \dot{y}(x, t)) + k(z(t) - y(x, t)) - n(t) = 0$ (1) ここに、 W : 車輛ばね上質量、 C : 減衰定数、 k : ばね定数。車輛の全接地力を $P(t)$ とすると、これは次式になる。

$$P(t) = W_1 \ddot{g} - W \ddot{z}(t) \quad (2)$$

橋梁のモデルとして梁モデルを考える。この梁の m 次の基準関数を $\phi_m(x)$ 、基準座標を $g_m(t)$ とすると、梁の変位は次式になる。

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(x) g_m(t) \quad (3)$$

$\ddot{g}_m(t) + 2\zeta_m \omega_m \dot{g}_m(t) + \omega_m^2 g_m(t) = \phi_m(vt) P(t) / M_m^*$ (4) ただし、 ζ_m, ω_m は各々減衰定数および固有円振動数であり、 M_m^* は次式で示される量である。 $M_m^* = \int_0^L \phi_m(x) dx$ (5)

次に路面の凹凸について述べる。路面凹凸のパワースペクトラムは実験により次式になることが知られている。

$$S_n(\Omega) = \alpha \Omega^{-n} \quad (6)$$

走行速度を一定とすると、 $\Omega = \omega / 2\pi v$ であるので、(6)式は次式になる。 $S_n(\omega) = \alpha v^{n-1} (\omega / 2\pi)^{-n} \quad (7)$ (7)式において、べき指数 n を 2.0、 α を $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{m}/\text{C}$ とする。ところが、(7)式のパワースペクトラムは ω が小さくなると極めて大きくなるので、(7)式の代わりに、次式で示されるパワースペクトラムを用いる。 $S_n(\omega) = S_0 / (\omega^2 + \alpha^2) \quad (8)$ ただし、 $S_0 = (2\pi)^2 \alpha v$ 、 α は実験的に求められるパラメータである。(8)式は白色雑音過程が作用する一階の微分方程式の定常解過程のパワースペクトラムとして得られる。 $\dot{n}(t) + \alpha n(t) = w(t) \quad (9)$ $w(t)$ は平均値 0、分散 S_0 をもつ白色雑音過程である。

3 共分散方程式について 外力 $W(t)$ を受ける系の運動方程式は、一般に次式で表わされる。

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + W(t) \quad (10) \quad \text{ここに、} X(t), W(t): n \text{ 次元ベクトル、} A(t): (n)^2 \text{ の係数行列、} W(t) \text{ は次式で示される} n \text{ 次元の白色雑音過程ベクトル、} E[W(t)] = 0 \quad E[W(t)W^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (11)$$

ところで、(10)式の解は線形微分方程式の理論より次式になる。 $X(t) = \Phi(t, \tau)X(\tau) + \int_{\tau_0}^t \Phi(t, \eta)W(\eta)d\eta \quad (12)$

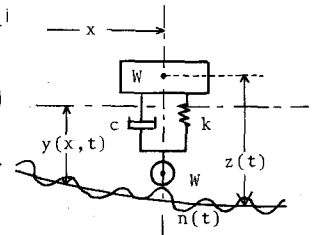


図 1

ただし、 $\Phi(t, \tau)$ は $(m \times m)$ の状態遷移行列、 $\Phi(t, \tau)$ の性質は次に示す。 $\Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau)$ 、 $\Phi(\tau, \tau) = I$ (単位行列)、 $\Phi(t, \tau)^T = \Phi(\tau, t)$ 、 $\Phi(t_2, t_1) = \Phi(t_2, t_2)\Phi(t_1, \tau)$

(i) $X(t)$ の期待値 $E[X(t)] = \Phi(t, \tau)E[X(\tau)]$ (13) (ii) $X(t)$ の共分散 $R_X(t) = E[(X(t) - E[X(t)])(X(t) - E[X(t)])^T]$ (14) (6)(7)(8)式より次式を得る。 $R_X(t) = \Phi(t, \tau)R(\tau)\Phi(t, \tau)^T + \int_{\tau}^t \Phi(t, \theta)Q(\theta)\Phi(t, \theta)^T d\theta$ (15)

(15)式より次の共分散方程式が得られる。 $\dot{R}_X(t) = A(t)R_X(t) + R_X(t)A(t)^T + Q(t)$ (16-1)

初期条件 $R_X(\tau) = E[(X(\tau) - E[X(\tau)])(X(\tau) - E[X(\tau)])^T]$ (16-2)

4 基礎方程式の誘導 橋梁を1自由度系と仮定し、次式のような状態ベクトルを用いると、橋梁、車輛路面凹凸に関する式は、次式で記述される $\dot{X}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{Bmatrix}^T$ (17)

ここに、 Z_2 は(9)式の $w(t)$ である。 $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + D(t)W(t)$ (18)
 $A(t)$: 係数行列、 $D(t)$ 、 $W(t)$: 外力に関する行列およびベクトルである。 $X(t)$ を橋梁系 $Y(t)$ と車輛系 $Z(t)$ に分けると、(18)式の行列およびベクトルは次式で表わされる。

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -\dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} \quad A(t) = \begin{bmatrix} -A_Y(t) & -A_{YZ}(t) \\ A_{ZY}(t) & A_Z(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} D_Y(t) & D_{YZ}(t) \\ D_{ZY}(t) & D_Z(t) \end{bmatrix} \quad W(t) = \begin{bmatrix} -W_Y(t) \\ W_Z(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$X(t)$ の共分散を $R_X(t)$ とすると、これは次式のように分割される。さらに $W(t)$ の共分散 S_W は(20)式で表わされる。

$$R_X(t) = \begin{bmatrix} R_Y(t) & R_{YZ}(t) \\ R_{ZY}(t) & R_Z(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$S_X = \begin{bmatrix} S_Y & S_{YZ} \\ S_{ZY} & S_Z \end{bmatrix} \quad (21)$$

運動方程式(10)と共分散方程式(16)の対応より、(19)式で表わされる運動方程式により、次の共分散方程式が得られる。共分散行列 $R_X(t)$ は対称行列であるので、

独立な方程式は、その三角要素で記述される。ここでは、 $D_{YZ}(t)$ 、 $D_Z(t)$ 、 S_{YZ} 、 S_{ZY} 、 S_Z は各々0となる。

$$\begin{aligned} \dot{R}_Y(t) &= A_Y(t)R_Y(t) + A_{YZ}(t)R_{ZY}(t) + R_Y(t)A_Y(t)^T + R_{YZ}(t)A_{YZ}(t)^T + D_Y(t)S_Y D_Y(t)^T \\ \dot{R}_{YZ}(t) &= A_Y(t)R_{YZ}(t) + A_{YZ}(t)R_Z(t) + R_Y(t)A_{YZ}(t)^T + R_{YZ}(t)A_Z(t)^T + D_Y(t)S_Y D_{ZY}(t)^T \\ \dot{R}_Z(t) &= A_{ZY}(t)R_{YZ}(t) + A_Z(t)R_Z(t) + R_{ZY}(t)A_{ZY}(t)^T + R_Z(t)A_Z(t)^T + D_{ZY}(t)S_Y D_{ZY}(t)^T \end{aligned}$$

自動車は橋梁に進入する際、自動車は路面の凹凸により (22)
 定常状態に達していると考えられるので、この共分散を $R_Z(t)$ の初期条件として用いる。他の値 $R_Y(t)$ および $R_{YZ}(t)$ は各々0となる。

5 数値計算 路面の凹凸により定常不規則振動している車輛が、橋梁の中心に作用した場合の定常応答について考える。従来の解析によれば、車輛、橋梁系の伝達関数は $H(j\omega)$ とすれば、変位応答の分散 σ_y^2 は次式より得られる。 $\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_k(\omega) d\omega$ (23)

図2、図3はスパンを20mから100mとした場合、橋梁の定常応答を解析的なわめで規準化した値を図示したものである。図2は(23)式を直接積分したものである。図3は共分散方程式による結果である。減衰定数0.001の場合、直接積分の方法では急激に変化するが、これは数値積分による計算誤差と考えられる。減衰定数が0.01以上になると両法は良好な一致を示す。

非定常な場合の計算結果は講演時に発表する。

〔参考文献〕

- (1) 山田善一、小堀為雄 “昭和42.12 土木学会論文集”，(2) 小堀為雄、堀川康男 “1976年4月 土木学会論文集”，(3) 吉村虎蔵、彦坂照他 “昭和50.12 九大工学集報”，

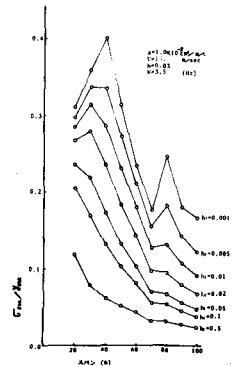


図2 直接積分による定常応答

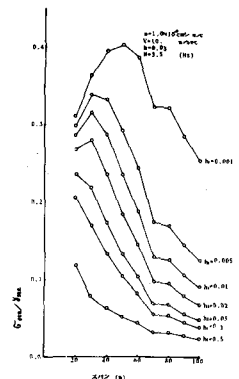


図3 共分散方程式による定常応答