

長崎大学 工学部 正員 嶋山 毅

長崎大学 “ “ 嘱託 伊藤和夫

1. まえびき アーチの軸線形状が、部材自重に対する平衡曲線にひとまる限りにあてば、アーチの安定性に対し、部材自重は何ら二次的な影響をあよぼさない。しかし、活荷重による変形に伴って、アーチ軸線形状が部材自重に対する平衡曲線でなくば、その結果として、アーチ部材には自重による新たな曲げモーメントが発生し、それがアーチの安定性に重要な影響をあよぼすようになる。この傾向は、剛性の低いアーチあるいは長大スパンのアーチにおいて特に顕著になることが予想される。アーチの安定性にあよぼす部材自重の影響について Kennedy⁽¹⁾ は扁平固定円弧アーチの、集中荷重に対する座屈耐荷性能にあよぼす部材自重の効果と理論的および実験的に解析し、扁平固定円弧アーチの耐荷性能に対し部材自重が危険側の影響を与えることを明らかにしている。本研究は、任意の軸線形状を有するアーチの、各種荷重に対する座屈耐荷性能にあよぼす、アーチ部材自重の影響を解析したものである。

2. 基礎微分方程式 アーチ軸長、支間、基準断面の2次モーメントおよび断面積をそれぞれ l, L, I_0 および A_0 とし、せん断力、軸力、曲げモーメント、たわみ角、接線方向変位および法線方向変位を Q, N, M, θ, w, u および $\bar{u}$ とし $Q = -\frac{L^2}{EI_0} \bar{Q}, N = -\frac{L^2}{EI_0} \bar{N}, M = -\frac{L^2}{EI_0} \bar{M}, w = \frac{L}{L} \bar{w}, u = \frac{L}{L} \bar{u}$ なる無次元量を導入し、アーチ軸線に沿う変域 $[0, 1]$ の無次元座標を η とすれば部材自重の効果を考慮した変断面任意形アーチの座屈耐荷力方程式は次のようになる。

$$\frac{dQ}{d\eta} + \frac{L}{R(\eta)} N + \gamma \nu \alpha^2 \frac{R(\eta) A(\eta) \cos \varphi}{I_0} \frac{d\theta}{d\eta} - \gamma \nu \alpha^2 \frac{A(\eta)}{I_0} \sin \varphi \cdot \theta - \nu \left[1 - \frac{R(\eta)}{L} \frac{d\theta}{d\eta} \right] \frac{L^3}{EI_0} + \nu \theta \frac{L^3}{EI_0} = 0 \quad (1, a)$$

$$\frac{dN}{d\eta} - \frac{L}{R(\eta)} Q - \gamma \nu \alpha^2 \frac{R(\eta) A(\eta) \sin \varphi}{I_0} \frac{d\theta}{d\eta} - \gamma \nu \alpha^2 \frac{A(\eta)}{I_0} \cos \varphi \cdot \theta - \nu \theta \frac{L^3}{EI_0} - \nu \left[1 - \frac{R(\eta)}{L} \frac{d\theta}{d\eta} \right] \frac{L^3}{EI_0} = 0 \quad (1, b)$$

$$\frac{dM}{d\eta} - \nu Q + \nu \frac{m L^3}{EI_0} = 0 \quad \frac{d\theta}{d\eta} = \nu \frac{I_0}{L} \frac{M}{I_0} \quad \frac{dw}{d\eta} = \frac{L}{R(\eta)} u - \frac{\nu}{\alpha^2} \frac{A_0}{A(\eta)} N \quad \frac{du}{d\eta} = -\frac{L}{R(\eta)} w + \nu \theta - \frac{\nu}{\alpha^2} \frac{A_0}{A(\eta)} Q \quad (1, c) \quad (1, d) \quad (1, e) \quad (1, f)$$

ただし $\alpha^2 = \frac{A_0 L^2}{I_0}, \nu = \frac{L}{L}, \gamma = \frac{\rho g L}{E}, \mu = \frac{C}{K E}$ であり ρ, α はそれぞれ、アーチ部材の単位容積重量、せん断係数である。また $R(\eta), \varphi(\eta), p, g, m$ はそれぞれ任意長の曲率半径、接線の傾斜角、法線方向荷重強度、接線方向荷重強度、分布モーメント荷重強度である。

3. 離散的な一般解 自重を考慮した変断面任意形アーチの座屈耐荷力方程式 (1, a) ~ (1, f) は曲率半径 $R(\eta)$, 断面2次モーメント $I(\eta)$, 断面積 $A(\eta)$ などを変数係数とする連立微分方程式であり、その解析解を求めることは困難である。したがって本研究にあては①微分方程式の積分方程式への変換と②積分方程式の近似解法の応用により、座屈耐荷力方程式の離散的な一般解を求める。

すなわち、離散的な一般解法にあては、任意マトリックス、有限要素法(変位法)および差分法による数値解の取れん性の良好なること、文献(2)において述べられている。鉛直分布荷重を受けるアーチの m 等分長にわたる離散的な一般解は (2, a) ~ (2, f) に示すところである。

$$\begin{aligned} \text{ただし } a_{ni} &= a_{n0} - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} \left\{ \frac{L}{R_j} b_{nj} + \nu \left(\gamma \alpha^2 \frac{A_j}{A_0} + \lambda^2 \frac{P_j}{P_0} \cos \varphi_j \right) \left(\nu \frac{R_j}{L} \frac{I_j}{I_0} \cos \varphi_j \cdot C_{nj} - \sin \varphi_j \cdot d_{nj} \right) \right\} \\ a_{n0} &= 0 \quad (n \neq 1), \quad a_{10} = 1 \\ f_{\eta ij} &= \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} \left\{ \nu d_{\eta kj} - \frac{L}{R_k} e_{\eta kj} - \frac{\nu}{\alpha^2} \frac{A_0}{A_k} a_{\eta kj} \right\} \quad \beta_{ij} : \text{数値積分則の重み係数} \end{aligned} \quad (2, a) \sim (2, f)$$

4. 座屈条件式

1例として、2ヒンジアーチおよび固定アーチの座屈条件式を示す。

$$\begin{vmatrix} C_{1m} & C_{2m} & C_{4m} \\ e_{1m} & e_{2m} & e_{4m} \\ f_{1m} & f_{2m} & f_{4m} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} d_{1m} & d_{2m} & d_{3m} \\ e_{1m} & e_{2m} & e_{3m} \\ f_{1m} & f_{2m} & f_{3m} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

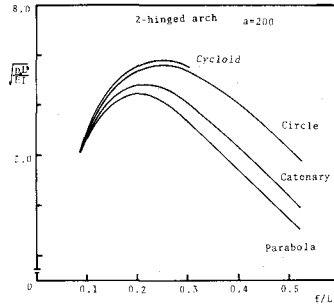


図-1(a)

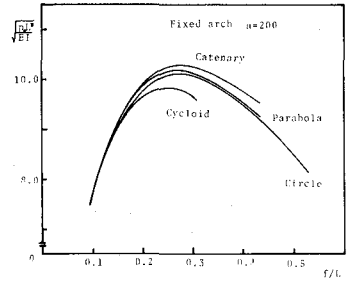


図-1(b)

5. 座屈耐荷力特性

図-1(a)(b)は円弧、放物線 cycloid および catenary の4平面曲線の形状を有する2ヒンジアーチと固定アーチに水平荷重が作用する時の座屈耐荷力 $\sqrt{\frac{P_u L^3}{EI}}$ と拱矢比 f/L との関係を示す

① 2ヒンジアーチにありて座屈耐荷力は cycloid が最も高く円弧, catenary, 放物線の順で、固定アーチにありては catenary が最も高く放物線, 円弧, cycloid の形状のアーチの順である。② 固定アーチはアーチの形状にかかわらず2ヒンジアーチに比べ座屈耐荷力が高く、拱矢比 $f/L = 0.2 \sim 0.3$ 付近で座屈耐荷力は最大値になることが共通して見える。

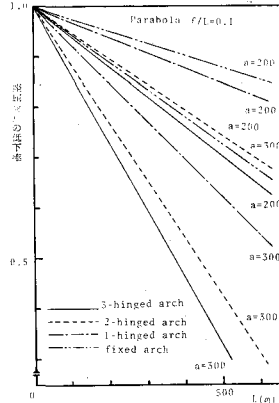


図-2(a)

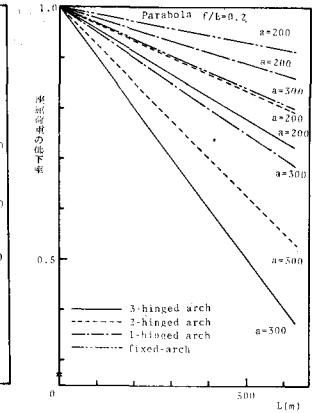


図-2(b)

図-2(a)(b)は拱矢比 $f/L = 0.1, 0.2$ の放物線アーチの座屈耐荷力にあおぼす自重効果と支間長 L との関係を示し、2ヒンジ, 1ヒンジ, 固定アーチを用いて示し、更に細長比 $a = 200, 300$ についても比較した。なお縦軸は自重効果も無視した座屈耐荷力に対する低下率である。① 拱矢比 $f/L = 0.1, 0.2$ 細長比 $a = 200, 300$ いずれの場合も自重効果は3ヒンジアーチが最も大きく、ついで2ヒンジ, 1ヒンジ, 固定アーチの順である。② 細長比 $a = 200$ に比べ $a = 300$ の場合が自重効果は大きくこれは拱矢比 $0.1, 0.2$ に共通している。③ アーチの支間長 L が $200, 400, 600$ と長くなるに伴って自重効果が直線的に大きくなるのがわかる。図-3は(i) 等分布水圧荷重 (ii) 水平単位長につき等強度 p_0 を有する鉛直分布荷重 (iii) 単位弧長につき等強度 p_0 を有する鉛直分布荷重が放物線アーチに作用した時の座屈耐荷力 $\sqrt{\frac{P_u L^3}{EI}}$ と拱矢比 f/L との関係を示した。① 一般的に座屈耐荷力は固定, 1ヒンジ, 2ヒンジ, 3ヒンジアーチの順に低下し、拱矢比 $f/L = 0.2 \sim 0.3$ 付近で座屈耐荷力は最大値になる。② 4種類のアーチにありて (i) の荷重に対する耐荷性が最も低く (iii), (ii) の順になることが共通して見える。なお座屈モードは3ヒンジ, 1ヒンジアーチは対称型, 2ヒンジ, 固定アーチは非対称型である。

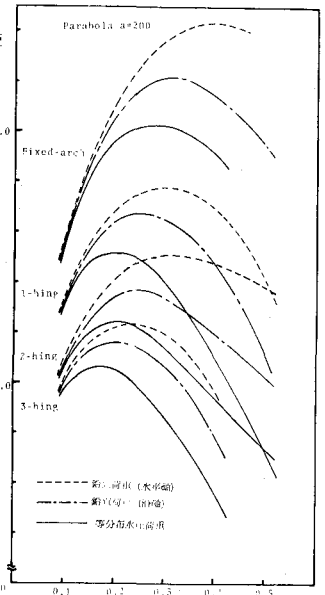


図-3

f/L

参考文献 1) J.S.Kennedy and S. Aggarwal; Effect of Weight on Large Deflection of Arches, Proc. ASCE, EM 3, 1971, pp. 637-644.

2) 崎山毅, 栗田和夫; 断面曲線梁の座屈解法について, 長崎大学工学部研究報告第8号 昭和52年1月