

九州大学工学部 正員 橋本 武
同 学生員 場 勲得
同 学生員 ○副島 玄巳

1. 予えがき

自由水面を有する不圧地下水流れの浸透流問題に、有限要素法を適用して、自由水面および湧出点を仮定しながら反復計算を行い解析する際には、仮定湧出点の決定が問題であることは周知のとおりである。すなわち、湧出点を仮定すること自体が流れの系を束縛することになり、このために、場合によっては、湧出点近傍で奇妙な応答を示すことは、文献(1)に例示されているとおりである。しかしながら、湧出点仮定法は、各反復計算に際しての湧出点の推定法が妥当なものであれば、仮定湧出点の拘束が解の収束性に差程大きな影響を及ぼすものではなく、また算算労力の点で極めて有利であり、解析手順も簡明であるなど一すぐれた利点を有するものである。したがって、これほどにその利点を強調した各種の諸法^{ひんぱん}が提案されている。しかしこれらの諸法は前述の難点ゆえに、理論的に使用計算の面面にわたって必ずしも妥当とは言えないものがある。

そこで本研究では、精度の高い合理的な湧出点を推定することによって、湧出点仮定法の利点を損うことなく湧出点仮定に関する不都合を極力排除するとともに方法を新たに提案し、既往の諸法に代えんとするものである。

2. 湧出点推定法

一般に、湧出点の性質はFig. 1に示すように2つのタイプに分けられる。Type-Aは湧出点を生じる斜面の傾斜が $\theta \leq 90^\circ$ の場合で、自由水面は湧出点において斜面に接する。Type-Bは $\theta \geq 90^\circ$ の場合で、自由水面が湧出点において鉛直になる。これらの性質と、湧出点近傍の自由水面形状が擬放物線と近似できるという性質とを利用して、各反復計算に用いる湧出点の推定を次のように行うことができる。

(1) Type-A ($\theta \leq 90^\circ$) の湧出点推定法

いま、有限要素法による反復計算の(I-1)回目の仮定湧出点を P_{i-1} 、自由水面上の任意の2点を $1', 2'$ としてFig. 1の坐標に示すように自由水面が仮定されているものとする。この仮定湧出点、自由水面を用いた浸透性方程式を作成し、所要の境界条件のもとにこれを解けば、点 $1', 2'$ のポテンシャルが点 $1, 2$ のように与えられることになる。この点 $1, 2$ を通る自由水面に対面する新しい湧出点 P_i を求めることが、本題の目的である。いま P_{i-1} を原点とする座標系 (x, y) を導入し、点 $1, 2$ の座標値とそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする。前述のように、 P_i は点 $1, 2$ を通る滑らかな曲線が、 P_i で斜面に接することを考慮して算定することになるが、これを厳密に行なおうとすると計算が複雑化し、実用性を損う恐れがある。そこでFig. 2のように、まず点 $1, 2$ を通る x 軸との交点で、斜面の傾斜に同じ接線と有する放物線（以下、仮定放物線1と称する）、および x 軸との交点で、斜面の傾斜に同じ接線と有する放物線（仮定放物線2）を求めることにする。

まず、仮定放物線1の基礎微分方程式を

$$A_1 \frac{dy}{dx} = 1 / \sqrt{x_2 + x_0} \quad \text{ここに } A_1, x_0: \text{定数} \quad (1)$$

$$\text{とし、} \quad x = 0 \text{ で } \frac{dy}{dx} = \tan \theta, \quad x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) (= \bar{x}) \text{ で } \frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{および } x = x_1 \text{ で } y = y_1 \quad (2)$$

なる条件のもとに式(1)を解けば、仮定放物線1は

$$y = \frac{2}{A_1} (\sqrt{x_2 + x_0} - \sqrt{x_1 + x_0}) + y_1 \quad (3)$$

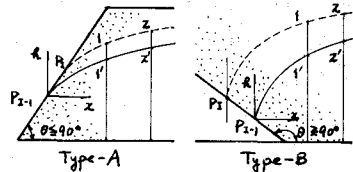


Fig. 1 湧出点のタイプ

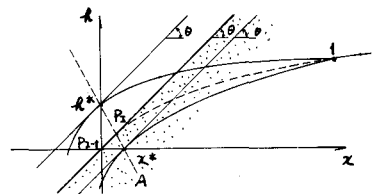


Fig. 2 $\theta \leq 90^\circ$ の場合の湧出点の求め方

$$\therefore z_0 = \bar{r} / \{ (\frac{z_1 - z_0}{r_0 - r_1})^2 \tan^2 \theta - 1 \}, A_1 = \cot \theta / \sqrt{z_0}$$

同様に、仮定放物線Zの基礎微分方程式を

$$A_2 \frac{dr}{dz} = 1 / (r + r_0) \quad \therefore A_2, r_0: \text{定数} \quad (6)$$

$$\text{とし } r=0 \text{ で } \frac{dr}{dz} = \tan \theta, r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) (= \bar{r}) \text{ で } \frac{dr}{dz} = \frac{r_0 - r_1}{z_1 - z_0}$$

$$\text{および } z = z_1 \text{ において } r = r_1 \quad (5)$$

より条件のもとに式(4)を解けば、仮定放物線Zは

$$z = \frac{A_2}{2} \{ (r + r_0)^2 - (r_1 + r_0)^2 \} + z_1 \quad (6)$$

$$\therefore r_0 = \bar{r} / \{ (\frac{z_1 - z_0}{r_1 - r_0}) \tan \theta - 1 \}, A_2 = \cot \theta / r_0$$

式(5)および式(6)より、 r, z 軸との交点 r^*, z^* を算定すれば

$$r^* = r_1 - z \sqrt{z_0} (\sqrt{z_1 + z_0} - \sqrt{z_0}) \tan \theta, z^* = z_1 - \frac{1}{2 r_0} (r_1 + z r_0) r \cot \theta \quad (7)$$

このとき、 r^*, z^* を通る直線Aを求めれば、仮定放物線1, 2の中間にあるいはその近傍において、直線Aとの交点で接線が斜面の傾斜に等しく、かつAを通り、 $(\bar{z}, \bar{r})$ で接線勾配が $(r_0 - r_1) / (z_1 - z_0)$ となる擬似放物線群を描くことが出来る。そこで、次のアイテリブの反復計算における修正自由水面および湧出点、この擬似放物線群の一つで近似出来るものと仮定すれば、湧出点 P_2 は、直線Aと斜面との交点として算出でき、その座標値 (z_1, r_1) が次のように求められることになる。

$$z_1 = r^* / (r^* / z^* + \tan \theta), r_1 = r^* \tan \theta / (r^* / z^* + \tan \theta) \quad (8)$$

(2) Type-B ($\theta \neq 90^\circ$) の湧出点推定法

Type-Bの湧出点の推定法を図示すれば、Fig. 3の通りである。その原理はType-Aと同様である。いま仮定放物線1, 2を

$$A_1 r = \sqrt{z - z_0} \quad (A_1, z_0: \text{定数}), A_2 (r - r_0) = \sqrt{z} \quad (A_2, r_0: \text{定数})$$

のように表わせば、両放物線はそれぞれ点1, 2を通るという条件より定数が算定され、新たな湧出点 P_2 の座標値は以下のとおりである。

$$z_1 = r_0 / (r_0 / z_0 + \tan \theta), r_1 = r_0 \tan \theta / (r_0 / z_0 + \tan \theta)$$

3. 適用例

本文に提案する方法を用いて、堤体内浸透流の問題(Fig. 4)を解析し、検討を行なえば次のとおりである。Fig. 5は上記の問題に対し湧出点の収束状況を示すに役立つものであり、比較例として、河野の方法⁴⁾により湧出点推定した。図より明らかなように、湧出点のポテンシャルは河野の方法がより低い値が算出されるが、反復段階初期における湧出点が極めて低く算出されるため、プログラミング上、特別の配慮が必要になる難点がある。またFig. 6は、点1, 2として節点番号16, 17 (Case 1), 15, 17 (Case 2), 15, 16 (Case 3)を選んだ場合の、両者の湧出点を算出し、比較したものである。各ケースについて2の湧出点のポテンシャルの最大差異は、著者の方法では $\Delta H \div 0.11$ であったに対し、河野の方法では $\Delta H \div 0.42$ であり、著者の方法が湧出点近傍の要素分割に対する安定性が高いことがわかるであろう。

【参考文献】 1) Neuman, S.P. and P.A. Witherspoon: Finite element

method of analyzing steady seepage with a free surface, Water Resour. Res.,

vol. 6, No. 3, 1970, pp. 491-497 2) Finn, W.D.: Finite element analysis of seepage through dams, Proc. ASCE, SM,

vol. 93, No. 6, 1967, pp. 41-48 3) 川本 昭 夫: 堤体および基礎における浸透流の有限要素解析について、土と基礎, vol. 18,

No. 12, 1970, pp. 19-26 4) 河野 伊 郎: 有限要素法による堤体浸透問題の解析, 土と基礎, vol. 21, No. 8, 1973, pp. 13-19

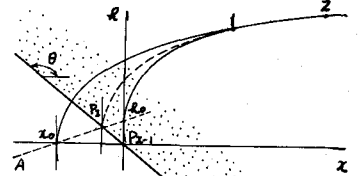


Fig. 3 $\theta \neq 90^\circ$ の場合の湧出点の求め方

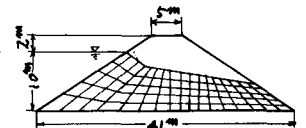


Fig. 4 解析モデル

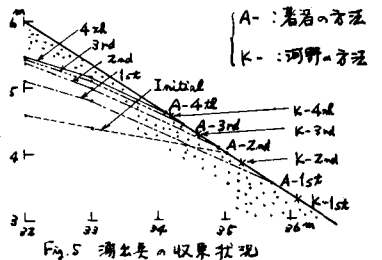


Fig. 5 湧出点の収束状況

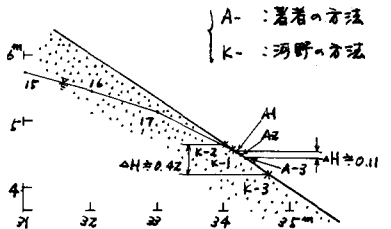


Fig. 6 湧出点の安定性