

九州大学工学部 正員 橋本 武
九州大学工学部 学生員 楊 勲得
九州大学工学部 学生員 ○松隈 宣明

1. まえがき 有限要素法は極めて汎用性に富み、他手法に勝る多くの特色も有することから、浸透流問題にも広く活用されている。しかし、従来のFEMの浸透流問題への直接適用では、演算量が膨大になり、また流量算定にばらつきが生じる等、難点がある。そこで本研究では、それらの難点を解消すべく、構造解析における還元法¹⁾の概念を導入し、FEMの基礎式から、還元解析のための基本式を誘導活用せんとするものである。本法は、FEMの欠点である演算能力が改善され、また流量算定に節点流量法を用いること、自由水面や、浸出点追跡上の要素分割とが相反することなく、極めて好都合になるものである。

2. ブロック分割と要素分割 従来のFEMでは、ポテンシャル急変箇所や要素分割を小さくする配慮などがあるものの、一般的な分割上の規則性はないが、本法では還元法の概念を用いるため、要素分割にある種の規則性が要望されることになる。すなわち、Fig. 1に示すごとく、ブロック分割も必要とすること、ブロック線上の節点数が互に等しいことの二点である。これらのことはFEMの任意分割に比し、本法の利点も損うものではない。

3. 基本式の誘導

A. 格間式・伝達式 ブロック線*i-1*と*i*とはとされるブロック*i*を取り出せば、Fig. 2に示すとおりである。各ブロック線上の節点番号を1, 2, ..., *n*と付し、これら節点のポテンシャル及び節点流量を構成されるベクトルを、 $H_{(i-1)i}$, $Q_{(i-1)i}$ と記号表示する。ブロック*i-1*も適当に、三角形・四辺形要素に分割し、FEMの基本式なる浸透性方程式も求め集積すれば、

$$\begin{Bmatrix} Q_{(i-1)i} \\ Q_{(i-1)i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} |k_{(i-1)(i-1)} & |k_{(i-1)i} \\ |k_{(i-1)i} & |k_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |H_{(i-1)i} \\ |H_{ii} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} |R_{(i-1)i} \\ |R_{ii} \end{Bmatrix} \quad \text{Fig. 2 Block and Block Line}$$

ここに $|k|$ ：浸透性マトリックス、 $|R_{(i-1)i}$, $|R_{ii}$ ：等価節点発生(吸収)流量、 Q は左側断面で流入、右側断面で流出が正とする。

上式を変形すれば、
$$\begin{bmatrix} |k_{(i-1)i} & n\theta_n \\ |k_{ii} & -n\mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |H_{(i-1)i} \\ |Q_{(i-1)i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -|k_{(i-1)(i-1)} & n\mathbb{I}_n \\ |k_{(i-1)i} & n\theta_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |H_{(i-1)i} \\ |Q_{(i-1)i} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -|R_{(i-1)i} \\ |R_{ii} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $\nabla^T = [H \ Q]$ なるベクトルも定義すれば式(1)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla_{(i-1)i} &= \mathbb{A}_{(i-1)i} \nabla_{(i-1)i} + \nabla_{(i-1)0} & \text{ここに } \nabla_{(i-1)0} &= \mathbb{A}_{(i-1)i} \begin{bmatrix} -|R_{(i-1)i} \\ |R_{ii} \end{bmatrix}^T, \\ \text{また } \mathbb{A}_{(i-1)i} &= \begin{bmatrix} -|k_{(i-1)(i-1)} & |k_{(i-1)i} \\ |k_{(i-1)i} & |k_{ii} \end{bmatrix}, & \mathbb{A}_{(i-1)i} &= \begin{bmatrix} |k_{(i-1)i} & n\theta_n \\ -|k_{ii} & n\mathbb{I}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

である。式(2)はブロック*i-1*に於てブロック線*i-1*と*i*との両状態ベクトルの関係を示す格間式であり、 $\mathbb{A}_{(i-1)i}$ は格間マトリックスである。Fig. 2の要素分割の性質より $|k_{(i-1)i}$ が対角線並行列となるため、その逆マトリックスも極めて容易に算出され、したがって $\mathbb{A}_{(i-1)i}$ の演算能力は差程問題とするには当たらない。Fig. 2に示すごとく、ブロック線*i*上に於て、ポテンシャルは一意的に定まり、また各節点の水収支に關照考察から $\nabla_{(i-1)i} = \nabla_{(i-1)i}$ が成り立つ。故に式(2)は次式のような。 $\nabla_{(i-1)i} = \mathbb{A}_{(i-1)i} \nabla_{(i-1)i} + \nabla_{(i-1)0} \quad (3)$ この式が本題の伝達式となるものである。

B. 境界条件式 Fig. 1に示すように、固定条件がブロック線1, *m*と与えられるが、その境界条件式は次のように誘導される。

(a) ブロック線1における境界条件式 固定条件がポテンシャル既定0の場合には、 $|H_{12} = |H_L \dots (a)$ なる条件が成立する。一方状態ベクトル ∇_0 は、

$$V_{12} = \begin{Bmatrix} H_{12} \\ Q_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{12} \\ nO_1 \end{Bmatrix} \cdot 1 + \begin{Bmatrix} nO_n \\ nI_n \end{Bmatrix} Q_{12} \quad \text{ここに式(4)を代入し整理すれば} \quad V_{12} = B_{LH} \begin{Bmatrix} Q_{12} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{ここに} \quad B_{LH} = \begin{Bmatrix} nO_n & H_L \\ nI_n & nO_1 \end{Bmatrix}$$

---- (4). すなわち、式(4)が、式(a)に代る境界条件で、式中の係数 B_{LH} はブロック線1の境界マトリックスである。同様にして、流量既知(Q_L)なる固定条件で与えられる場合の境界条件式と境界マトリックスがえられ次のようになる。

$$V_{12} = B_{LQ} \begin{Bmatrix} H_{12} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{ここに} \quad B_{LQ} = \begin{Bmatrix} nI_n & nO_1 \\ nO_n & Q_L \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Fig. 3. Seepage Through a Dam
(17 Blocks - 5 Elements Model)

(b) ブロック線 m における境界条件式

ブロック線 m 上の各節点でポテンシャル既知(H_R)の場合は、

$$B_{RH} V_{m(m-1)} = H_R \quad \text{ここに} \quad B_{RH} = \begin{Bmatrix} nI_n & nO_n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

同様に流量既知(Q_R)の場合には、

$$B_{RQ} V_{m(m-1)} = Q_R \quad \text{ここに} \quad B_{RQ} = \begin{Bmatrix} nO_n & nI_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

4. 解析手順

Fig. 1. の(a)(b)に例示するごとく複

圧浸透流問題について考えよう。相隣二つのブロック毎に式(3)の仮定式もたてれば、

$$V_{23} = F_{12} V_{12} + V_{10}, \quad V_{34} = F_{23} V_{23} + V_{20}, \quad \dots, \quad V_{m(m-1)} = F_{(m-2)(m-1)} V_{(m-2)(m-1)} + V_{(m-2)0} \quad (8)$$

上記各式に於て、第1式から順次代入を繰り返せば、

$$V_{23} = (F_{12}) V_{12} + V_{10}, \quad V_{34} = (F_{23} F_{12}) V_{12} + (F_{23}) V_{10} + V_{20}, \quad \dots, \quad V_{m(m-1)} = (F_{(m-2)(m-1)} F_{(m-3)(m-2)} \dots F_{12}) V_{12} + (F_{(m-2)(m-1)} F_{(m-3)(m-2)} \dots F_{23}) V_{10} + \dots + (F_{(m-2)(m-1)}) V_{(m-2)0} + V_{(m-2)0} \quad (8)$$

式(8)の最後の式とブロック m の格間式、式(6)又は、式(7)及び式(4)又は、式(5)を用いて Q_{12} 又は H_{12} を未知量とする本題の基礎式がえられる。例えば両境界条件がポテンシャル既知の場合の基礎式を示せば次のとおりである

$$B_{RH} F_{B_{LH}} \begin{Bmatrix} Q_{12} \\ 1 \end{Bmatrix} + B_{RH} (F_{(m-1)m} F_{(m-2)(m-1)} \dots F_{23}) V_{10} + \dots + B_{RH} (F_{(m-1)m}) V_{(m-2)0} + B_{RH} V_{(m-1)0} = H_R \quad \text{ここに} \quad F_{12} = \frac{nI_n}{nO_n} F_{12} \quad (9)$$

次にFig. 1. の(c)(d)に示すごとく不圧浸透流問題の場合であるが、このとき基礎式そのものは、前述のものとは変わらない

唯、自由水面と浸出点が存在するため試算法による解析を行う必要がある。従来のFEMでは、自由水面及び浸出点の修正追跡過程の速いにより、浸出点仮定法と2段階法の2法が提案されている還元法⁽²⁾の概念を導入した本解析に於て、2段階法では基本式に若干の修正も必要とするものの、両手法による解析が可能であるがその内容は紙面の都合上割愛し、講演時に詳述することにする。

5. 適用例

Fig. 3は、ダム浸透流問題に対して本還元解析法のうち、浸出点仮定法を適用した例である。浸出点の推定は

著者の方法⁽⁵⁾を採用した。図には各演算段階に於ける自由水面、浸出点の収束状況がプロットされている。同じモデルを分割要素数を変えて解析し、比較的に粗い分割でも精度の高い結果が得られる事がわかった。この例題は従来のFEMによる解析がされているが、断面流量に関し本法と比較すれば、Table 1のとおりである。その値は直接適用の場合の平均値よりやや小さいが、Casagrandeの方法等の結果と比較するとは何ら劣るものではないと言える。その他、直交異方性体、鉛直コアを有する堤体、トンネルの湧水問題等も解析したが、詳細は講演時に報告の予定である。

6. 結 語

以上還元有限要素法ととも称すべき手法を提案したが、本法の利点とする所を例挙すれば、次のとおりである。1) 1/4

(a) 1/4対角3項帯行列である事及び浮動・固定点の概念の導入により格間マトリックスの算定が極めて少ない演算量で済む。又基礎式の次元が著しく減ぜられ解析上の演算効率が極めて少ないものになる。2) 粗い分割でも比較的良好な解が得られる。3) 断面流量が、ばうく事なく従来のFEMに比し勝ると思われる結果を得る。なお本法の適用に当り注意すべき事は、ブロック数が大きくなればなる程『の各要素の値が大きくなるため計算上の丸め誤差による演算精度の劣化が生じる事である。倍精度演算の工夫が必要になる。本法は、ダムの他、トンネル湧水問題、二層流問題、非定常流三次元流にも適用可能で目下演算中であり結果を得て公表したい。

参考文献

- 1) たとえば Taylor, R.L. & C.B. Brown; Darcy flow Solutions with a Free Surface, Proc. ASCE, vol. 93, No. HY2, 1967
- 2) たとえば 川本 駒田, 宮田; 堤体及び基礎における浸透流の有限要素解析に於て, 土と基礎 vol. 18, No. 12, 1970 PP. 25~33
- 3) Kono, I.; Finite Element Analysis of Interface problem in Ground Water Flow 土論, No. 228, 1974, PP. 106~116
- 4) Newman, S. P. and P. A. Witherspoon; Finite Element Method of Analyzing Steady Seepage with a Free Surface Water Res. Research, vol. 6, No. 3, 1970, PP. 889~897
- 5) 穂木 楊 叔隆; 不圧流水の湧出点推定法, 九大工学集報 vol. 49, No. 1, 1976