V — 9　　土の応力変形特性とFEM解析　　— 第2報 —

長崎大学　　棚橋　由彦

1. 緒言

FEMが土質工学上の諸問題の解析手段として利用されてから既に10年以上経過している．しかしその実状は土の構成則の研究の遅れと相まって，土の応力変形特性を適確に評価した解析が行なわれているとは言い難い．その一例として，土の重要な変形特性の1つであるダイレタンシー現象が考慮されていないことが揚げられる．そこで本報では，ダイレタンシーを解析結果に反映させるには，異方性マトリックスを用いるべきことを指摘し，その変形係数の非線形性の評価の方法について論及する．更に豊浦砂を例にとり具体的な式を与える．

2. 本論

2-1. 2軸直交異方性材料の主ひずみ増分-主応力増分関係

土を区分で線形弾性な2軸直交異方性材料と仮定すれば，そのひずみ増分応力増分関係は，周知のように，マトリックス表示で(1)式で与えられる．ただし異方性の主軸はx軸と一致，応力は全て有効応力を意味する．

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_1/E_1 & -\nu_1/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_2/E_2 & 1/E_2 & -\nu_3/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_2/E_2 & -\nu_3/E_2 & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_3)/E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

＊マトリックスの対称性から $\nu_1/E_1 = \nu_2/E_2$

ここに E_1 はx方向のヤング率，E_2 はyz平面内のヤング率，ν_{ij} はi方向から単軸応力を加えたとき(ひずみは ε_i)のj方向のひずみを ε_j とすると $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$ で定義され，$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_1$，$\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_2$，$\nu_{23} = \nu_{32} = \nu_3$ である．岩崎[1]は，軸対称条件 $d\sigma_2 = d\sigma_3$ の下で(1)式から(2)，(3)式を導いた．

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{oct} \\ d\sigma_{oct} \\ d\sigma_{oct} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ dS_3 \end{bmatrix} \text{—(2)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} k_1+2g_1 & k_1-g_1 & k_1-g_1 \\ k_2-g_2 & k_2+2g_2 & k_2-g_2 \\ k_2-g_2 & k_2-g_2 & k_2+2g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \text{ —— } (3)$$

ここに $d\varepsilon_j, d\sigma_j, dS_j$ はそれぞれ主ひずみ，主応力，主偏差応力の増分であり，(2)式の変形係数 k_1, k_2, g_1, g_2 と(1)式の変形係数の間には，次の関係式がある．

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 1/3K_1 = (1-2\nu_1)/E_1, & k_2 &= 1/3K_2 = (1-\nu_2-\nu_3)/E_2 \\ g_1 &= 1/2G_1 = (1+\nu_1)/E_1, & g_2 &= 1/2G_2 = (1+2\nu_2-\nu_3)/E_2 \end{aligned}\right\} \text{ —— } (4)$$

2-2. 2軸直交異方性材料の正八面体ひずみ増分-応力増分関係の誘導

(2)式で与えられる材料に i) 等方圧縮試験 $d\tau_{oct} = 0$; $dS_1 = dS_2 = dS_3 = 0$ を想定すると，そのときの主ひずみ増分 $d\varepsilon_{1c}$, $d\varepsilon_{3c}$ は $d\varepsilon_{1c} = k_1 d\sigma_{oct}$，$d\varepsilon_{3c} = k_2 d\sigma_{oct}$．したがって体積ひずみ増分 $d\varepsilon_{vc}$，正八面体セン断ひずみ増分 $d\gamma_{octc}$ は(5)，(6)式で与えられる．

圧密項；　$d\varepsilon_{vc} = d\varepsilon_{1c} + 2d\varepsilon_{3c} = (k_1 + 2k_2)\,d\sigma_{oct}$　　(5)

ディストーション項；　$d\gamma_{octc} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(d\varepsilon_{1c} - d\varepsilon_{3c}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}(k_1 - k_2)\,d\sigma_{oct}$　　(6)

＊ここにディストーション項 $d\gamma_{octc}$ は応力の静水圧増分による正八面体セン断ひずみ増分の意

次に ii) 平均主応力一定試験 $d\sigma_{oct} = 0$ ($d\sigma_2 = d\sigma_3$) を想定すると，そのときの主ひずみ増分 $d\varepsilon_{1d}$, $d\varepsilon_{3d}$ は，$d\varepsilon_{1d} = g_1 dS_1$，$d\varepsilon_{3d} = g_2 dS_3$．また $dS_1 = d\sigma_1$，$dS_3 = d\sigma_3 = -d\sigma_1/2$，$d\sigma_1 = \sqrt{2}\,d\tau_{oct}$ より，そのときの体積ひずみ増分 $d\varepsilon_{vd}$，セン断ひずみ増分 $d\gamma_{octd}$ は(7)，(8)式で与えられる．

ダイレタンシー項；　$d\varepsilon_{vd} = d\varepsilon_{1d} + 2d\varepsilon_{3d} = \sqrt{2}(g_1 - g_2)\,d\tau_{oct}$　　(7)

セン断ひずみ項；　$d\gamma_{octd} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(d\varepsilon_{1d} - d\varepsilon_{3d}) = \frac{2}{3}(2g_1 + g_2)\,d\tau_{oct}$　　(8)

(5)~(8)式から，2軸直交異方性材料の正八面体ひずみ応力の増分関係は(9),(10)式で与えられる．

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_{vc} + d\varepsilon_{vd} = (k_1 + 2k_2)\,d\sigma_{oct} + \sqrt{2}\,(g_1 - g_2)\,d\tau_{oct} \qquad (9)$$

$$d\gamma_{oct} = d\gamma_{octc} + d\gamma_{octd} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(k_1 - k_2)\,d\sigma_{oct} + \frac{2}{3}(2g_1 + g_2)\,d\tau_{oct} \qquad (10)$$

等方性マトリックスでは $k_1 = k_2$, $g_1 = g_2$ となり，(6),(7)式より明らかなように ダイレタンシー，ディストーションともにゼロとなる．したがってダイレタンシー現象が構成則の段階で如何に見事に表現されていようと，等方性マトリックス（いいかえれば Eとν または KとGの 2つの変形係数の非線形性のみを評価するFEM解析）を用いる限り，不均一な応力場でのダイレタンシーの挙動を解析し得ないことになる．

2-3. 2軸直交異方性マトリックスの変形係数の評価方法

i) 一般論； 正八面体応力ひずみ理論[2]の立場から その増分関係は次式で与えられる．

$$d\varepsilon_v = (\partial\varepsilon_v/\partial\sigma_{oct})\,d\sigma_{oct} + (\partial\varepsilon_v/\partial\tau_{oct})\,d\tau_{oct}, \quad d\gamma_{oct} = (\partial\gamma_{oct}/\partial\sigma_{oct})\,d\sigma_{oct} + (\partial\gamma_{oct}/\partial\tau_{oct})\,d\tau_{oct} \qquad (11)$$

また

$$\left.\begin{aligned} &(\partial\varepsilon_v/\partial\sigma_{oct})_{\tau_{oct}=0} = d\varepsilon_{vc}/d\sigma_{oct} \fallingdotseq \underline{\Delta\varepsilon_{vc}/\Delta\sigma_{oct}} = f_1'(\sigma_{oct}, \tau_{oct}), \quad (\partial\varepsilon_v/\partial\tau_{oct})_{\sigma_{oct}=\mathrm{const}} = d\varepsilon_{vd}/d\tau_{oct} \fallingdotseq \underline{\Delta\varepsilon_{vd}/\Delta\tau_{oct}} = f_2'(\sigma_{oct}, \tau_{oct}) \\ &(\partial\gamma_{oct}/\partial\sigma_{oct})_{\tau_{oct}=0} = d\gamma_{octc}/d\sigma_{oct} \fallingdotseq \underline{\Delta\gamma_{octc}/\Delta\sigma_{oct}} = g_1'(\sigma_{oct}, \tau_{oct}), \quad (\partial\gamma_{oct}/\partial\tau_{oct})_{\sigma_{oct}=\mathrm{const}} = d\gamma_{octd}/d\tau_{oct} \fallingdotseq \underline{\Delta\gamma_{octd}/\Delta\tau_{oct}} = g_2'(\sigma_{oct}, \tau_{oct}) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

解析対象の土質材料に応力制御，排水条件で，i) 等方圧縮試験，ii) 平均主応力一定試験を行ない，(12)式の下線を引いたそれぞれのひずみ応力増分比と正八面体応力成分の間に，関数関係 f_1', f_2', g_1', g_2' を見出すことができれば，(9)(10)式と(11)式を等置して(13)式が導びかれる．

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k_1(\sigma_{oct}, \tau_{oct}) = f_1'/3 + g_1'/\sqrt{2}, & g_1 &= g_1(\sigma_{oct}, \tau_{oct}) = g_2'/2 + f_2'/3\sqrt{2} \\ k_2 &= k_2(\sigma_{oct}, \tau_{oct}) = f_1'/3 - g_1'/2\sqrt{2}, & g_2 &= g_2(\sigma_{oct}, \tau_{oct}) = g_2'/2 - \sqrt{2}f_2'/3 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

上式が2軸直交異方性マトリックスの4つの変形係数 k_1, k_2, g_1, g_2 の非線形性を室内試験結果から評価する式．

ii) 具体例； 筆者は上記の室内試験から，初期間隙比e_0をパラメーターに加えた豊浦砂の正八面体応力ひずみ関係式(14)を得ている[2]．

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_v = \frac{\sigma_{oct}}{\nu_1 + \nu_2\sigma_{oct}} - \left\{\mu_1\frac{\lambda_1 R_{oct}}{1-\lambda_2 R_{oct}} + \mu_2\right), \quad \gamma_{oct} = \frac{\lambda_1 R_{oct}}{1-\lambda_2 R_{oct}} \quad {}^{*}\text{ここに } R_{oct} = \tau_{oct}/\sigma_{oct} \\ &\nu_1(e_0) = -1.826e_0 + 2.967, \quad \nu_2(e_0) = -0.885e_0 + 1.252, \quad \lambda_1(e_0) = 1.094 \\ &\lambda_2(e_0) = 1.979e_0 - 0.365, \quad \mu_1(e_0) = -1.420e_0 + 1.417, \quad \mu_2(e_0) = 1.493e_0 - 1.490 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

ただし，$R_{oct} \leq R_{cr} = \mu_2/(\mu_2\lambda_2 - \mu_1\lambda_1)$ のとき，$\mu_1 = \mu_2 = 0$ とおく．

(12)~(14)式から豊浦砂の2軸直交異方性マトリックスの変形係数 k_1, k_2, g_1, g_2 の非線形評価式(15)を，導いた．

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k_1(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, e_0) = \frac{\lambda_1 R_{oct}}{\sigma_{oct}(1-\lambda_2 R_{oct})^2}\cdot\left(\frac{\mu_1}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\nu_1}{(\nu_1 + \nu_2\sigma_{oct})^2} \\ k_2 &= k_2(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, e_0) = \frac{\lambda_1 R_{oct}}{\sigma_{oct}(1-\lambda_2 R_{oct})^2}\cdot\left(\frac{\mu_1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\nu_1}{(\nu_1 + \nu_2\sigma_{oct})^2} \\ g_1 &= g_1(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, e_0) = \frac{\lambda_1}{2\sigma_{oct}(1-\lambda_2 R_{oct})^2}\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\mu_1\right) \\ g_2 &= g_2(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, e_0) = \frac{\lambda_1}{2\sigma_{oct}(1-\lambda_2 R_{oct})^2}\cdot\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\mu_1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

(3),(15)式および(11)式から別個に得た側圧一定試験のひずみ増分値は良好な一致がみられた．したがって軸対称条件下では本論で行なった式の誘導は妥当なものと考える．

3. 結 語

土質材料を区分で線形弾性な2軸直交異方性材料とみなすことにより，ダイレタンシー項，ディストーション項が表現できることを指摘し，その4つの変形係数 k_1, k_2, g_1, g_2 の非線形性を室内試験結果から評価する一般式(13)を導いた．また豊浦砂を例にとり，具体的な評価式(15)を与えた．紙数の都合上，FEM平面ひずみ問題の解析に必要な，応力ひずみ増分マトリックスの誘導は別途報告したい．

引用文献 1) 岩崎峯夫“砂の応力ひずみ関係についての一考察”土木学会論報第209号 pp.95-101，1973

2) 棚橋由彦“不変量表示の応力ひずみ関係式－砂の場合－”長崎大学工学部紀要第6号 pp.103-112，1975