

宮崎大学工学部 正員 ○藤 本 廣

同 同 横 田 漢

1. まえがき

斜面安定や地盤支持力の問題に有限要素解析を適用するに当たっては、土の応力・ひずみ関係に伴う変形係数の非線型的な変動と適切に表現する必要がある。本文では、この変形係数の変動と変形過程における体積変化に伴う骨格構造のリンゴの変動という微視的観点から表現できるのではないかと考え、その第一段階として土の弾性と物性論的な立場から再検討してみることにした。その考察手段としては、以前に著者の一人が粘土のレイロジ方程式の誘導過程で導入した土の弾性の熱力学・統計力学的表示を再び採用するが、当時の考察では導入過程の仮定にかなり強引な点があったので今回その点を修正して考察を進めることにした。

2. 土の弾性の熱力学・統計力学的表示

2-1. 基礎理論

一般にある物質系に外力 F の増分 dF が作用して、その系が dF の作用方向に可逆的に $d\epsilon$ だけ変形し、同時に dQ なる熱量の変化が生じたとして、その系の内部エネルギー U 、エントロピー S 、絶対温度 T とすれば、熱力学の第一法則に Helmholtz の自由エネルギー ($H=U-TS$) を導入することにより、 dF はエネルギー弾性 $(\partial U/\partial \epsilon)_T$ とエントロピー弾性 $T(\partial S/\partial \epsilon)_T = -T(\partial F/\partial \epsilon)_T$ との和として次式で表わされる。

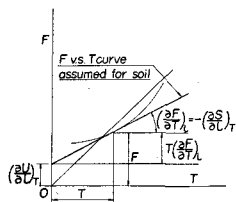
$$dF = (\partial U/\partial \epsilon)_T d\epsilon - T(\partial S/\partial \epsilon)_T d\epsilon \quad (2-1)$$

前出の論文では、この後統計力学的解析を進めるために土の F - ϵ 関係を図1に示すように直線と仮定し、さらに式(2-1)のエネルギー弾性とエントロピー弾性との間に比例関係が成立すると仮定して dF をエントロピー弾性の項のみで表わしていた。しかし今回は、 F - ϵ 関係はそのまま直線関係とするが、エネルギー弾性とエントロピー弾性との関係については比例関係を仮定せず夫々の分担区分に応じてそのまゝ解析することにした。

すなわち、 dF をエネルギー弾性に因する弾性力成分 dF_e とエントロピー弾性に因する弾性力成分 dF_s とに分け、次式で示す対応関係と考えることにした。

$$dF = dF_e + dF_s, \quad dF_e = (\partial U/\partial \epsilon)_T d\epsilon, \quad dF_s = -T(\partial S/\partial \epsilon)_T d\epsilon \quad (2-2)$$

この dF_e と dF_s のエネルギー弾性とエントロピー弾性に対する具体的分担区分については多少に議論の余地はあろうが、例えば、前者については粒子相互間の電気的反撥力と吸引力を考慮したポテンシャルエネルギーに対応するもの、後



者に対しては粒子自体の弾性や吸着水層の弾性が考えられよう。いま、 l_0 の長さの系に弾性力 $dF = dA \cdot A_0$ (A_0 は系における応力 dF の作用面積) が作用して $d\epsilon$ の可逆的な変形が生じて系の長さが l になったとして、このとき弾性ひずみ $\epsilon = (l-l_0)/l_0 = 1 - l_0/l$ 、 $\bar{\epsilon} = l/l_0$ --- (2-3) と dF との間に定式的関係が成立するものとする。

$$\begin{aligned} dA &= dF/A_0 = (dF_e + dF_s)/A_0 = dA_e + dA_s \\ &= E \epsilon = (E_e + E_s) \epsilon \end{aligned} \quad (2-4)$$

2-2. エネルギー弾性

エネルギー弾性に対応するものは $dF_e = dF_e/A_0 = E_e \epsilon$ であるが、これは次のように考える。すなわち、ここで粒子相互間に考えたポテンシャルエネルギーを U なるバネ定数に対応させ、そのような弾性をもつリンゴを単位変形機構と定義し、この単位変形機構が dF の作用方向に平行な単位長さ l 当りに M 個、 dF の作用方向に直角的単位断面積中に N 個連結しているものとする。一方、単位変形機構における平衡状態の粒子間隔を d_0 として、 $l_0 = \alpha M d_0$ (ただし α は $\alpha > 1$ の値をもつ長さについての補正係数) が dF によって変形して $d_0 \rightarrow d$ 、 $l_0 \rightarrow l = \alpha M d$ になるものとする。すると、 dF_e は $dF_e = E_e (l - l_0)$ と表えられ、一つの単位変形機構に貯わえられるポテンシャルエネルギーは

$$E_e (d_0 - d)^2 / 2 \quad (2-5)$$

となる。したがって、単位体積中にある単位変形機構が U 個、全エネルギー U は $U = E_e M N (d_0 - d)^2 / 2$ となる。さらに、 $d_0 = l_0 / \alpha M$ 、 $d = l / \alpha M$ を考慮すると U は

$$U = E_e N (l_0 - l)^2 / 2 \alpha M \quad (2-6)$$

となる。これに式(2-2)と(2-4)を考慮すると次式が得られる。

$$\Delta\sigma_e = -\frac{6}{\pi} \frac{k_b N}{\alpha M} (l-l) \quad (-は圧縮と表わす) \quad (2-7)$$

上式に $\alpha = l_0/M_0$ と代入すると次式が求まる。

$$\Delta\sigma_e = -\frac{k_b M N d_0^2}{V_0} \frac{l-l_0}{l_0} \quad (2-8)$$

$$\text{すなわち, } \Delta\sigma_e = E_d \xi \quad (2-9)$$

$$E_d = k_b M N d_0^2 / V_0$$

2-3. エントロピー弾性

エントロピー弾性については次のように考える。すなわち、式(2-2)によってエントロピー弾性に対応する弾性力成分は $\Delta F_s = -T(\partial S/\partial l)T$ であるから、単位変形機構の分布確率 P を決定すれば、 $S = k_b \ln P$ (k_b はBoltzmann定数)---(2-10)を利用してエントロピー弾性を記述しうることになる。 P の決定は前出論文と同様に粘土を対象とする場合には図2と図3、土、砂のような粗粒土を対象とする場合には図4～6で単位変形機構の分布を模式的に示したような仮想網目構造と仮想鎖を考えるとよいであろう。いま、図4と5において任意の単位変形機構を原点 O にとり、 O から $r^2 = x^2 + z^2$ で表わされる距離 r だけ離れた単位変形機構 O_m が $(r, r+dr)$ にある確率密度関数は、分布が対象とすれば次式で与えられる。

$$P(x,z) = \frac{m^2}{2\pi f^2} \exp\left\{-\frac{(x^2+z^2)}{2f^2}\right\} \quad (2-11)$$

$$f^2 = m(x_i^2 + z_i^2)$$

ここで、図5の仮想鎖の両端間の距離の各成分 (x, z) が ΔF_s の作用下で $(\bar{x}, \bar{z})$ になるとすると、変形後の仮想鎖の数は $dN = N R(x, z) dx dz = N \frac{m^2}{2\pi f^2} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2+z^2)\} dx dz, \frac{x^2}{2f^2}$ となる。また1本の仮想鎖の変形によるエントロピーの変化は、 $\Delta = k_b \{\ln P(x, z) - \ln P(\bar{x}, \bar{z})\}$ であるから全エントロピーの変化量 S は、 $S = -N R \frac{m^2}{2\pi f^2} \int \int \frac{x^2}{2f^2} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2+z^2)\} dx dz$ で表わされ、結局、 $S = -\frac{k_b m^2 N}{2} (\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$ --- (2-12) となる。束を等方性とすれば $\bar{x}^2 = \bar{z}^2 = 1$ であるから、上式は $S = -\frac{k_b m^2 N}{2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ となる。したがって、 $\frac{\partial S}{\partial \xi} = -k_b m^2 N (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = -k_b m^2 N$ 、これより式(2-2)、(2-3)を考慮すると、

$$\Delta\sigma_s = \frac{k_b m^2 N}{V_0} \xi = E_s \xi \quad (2-13)$$

$$\text{上式で } E_s = \frac{k_b m^2 N}{V_0} \text{ とすると、} \Delta\sigma_s = E_s \xi \quad (2-14)$$

$$\text{ただし、} \bar{E}_s = E_s \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{k_b m^2 N T}{V_0} \frac{\xi}{\xi_0} \quad (2-15)$$

これがエントロピー弾性の表式式である。

2-4. まとめ

以上により、式(2-4)、(2-9)から応力増分 $\Delta\sigma$ に対して、

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_e + \Delta\sigma_s = (E_e + \bar{E}_s) \xi = E \xi \quad (2-16)$$

$$\text{つまり、} E = (k_b M N d_0^2 + k_b m^2 N T \xi_0) / V_0 \quad (2-17)$$

となり、これにより土の弾性の微視的説明がある程度可

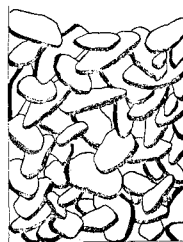


図2. 粘土の骨格構造の模式図 (Tan Jiong Kie, 1954)

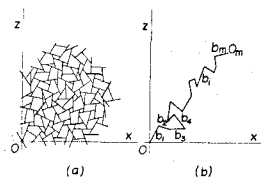


図3. 粘土の仮想網目模型と仮想鎖 (藤本, 1962)

図2. 粘土の骨格構造の模式図 (Tan Jiong Kie, 1954) 能になる。すなわち、式(2-17)において、弾性を支配する要因は、単位変形機構の数、 ξ/ξ_0 で示される変形程度、絶対温度、粒子間距離 Boltzmann の定数、粒子間のポテンシャルエネルギーに対応するバネ定数である。いま温度を一定とすれば、単位変形機構の数は乾燥密度に対応し、さらに体積変化に応じて変動するものと考えてよいであろう。また、変形程度を表わす ξ/ξ_0 は $\xi/\xi_0 = l/l_0 = 1/2$ であるからこの値は変形が進むにつれて小さくなり、したがって E も小さくなって実際の応力・ひずみ関係にもよく対応することになる。

一方、 ΔV (体積変化) と E との現象論的関係として、 $E = \frac{1}{\Delta V} (1-2\nu) \Delta\sigma_1 + 2\nu \Delta\sigma_3$ (ν = Poisson's ratio) --- (2-18) が成立するが、これは、 E = 一定 というケースは $\nu = 0.5$ で $\Delta V = 0$ のときに限定されることを示している。

3. あとがき

式(17)のデフォーメーションは妥当であるが、問題は長さの σ - ξ と l_0 の定量的な決定であろう。長さ l_0 は Boltzmann 定数と限定せず、土に独自の定数が決定するものかと考えている。

参考文献

- 1) 内田 藤本: 粘土の応力緩和機構についての考察, 「材料」116号, 昭和34年5月。
- 2) H. Fujimoto: The Theoretical Research on the Stress Relaxation of clay by Thermodynamics and Statistical Mechanics, "Geology & Soil Mechanics", I.U.T.H.M., 1966年7月。